

Viscosité sous-maille ↕ Viscosité numérique

Eric Lamballais, Rémi Gautier, Thibault Dairay,
Sylvain Laizet, Véronique Fortuné



Modélisation sous-maille au LEGI (1990-1996)

- Viscosité spectrale
- Fonction de structure
- Fonction de structure filtrée
- Fonction de structure sélective
- Viscosité spectrale dynamique

Physique +

Modèle Dynamique



Physique -

Viscosité numérique en LES (MILES, Implicit, etc.)

- La « boucherie numérique »
- L'erreur numérique : un modèle sous-maille ?
- Où est la physique?
- Schémas numériques trop « serviables » : méfiance...
- **Gresho P. M. & Lee R. L.**, 1979, “Don't suppress the wiggles – They're telling you something”, *Computers and Fluids*, **9**, pp. 223-253
- **Garnier E., Mossi M., Sagaut P., Comte P. & Deville M.**, 1999, “On the use of shock-capturing schemes for LES”, *Journal of Computational Physics*, **153**, 273-311
- Viscosité numérique via la dérivée première ou un opérateur additionnel

Schéma compact pour la dérivée seconde

- Schéma **centré implicite** aux différences finies

$$\alpha f''_{i-1} + f''_i + \alpha f''_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta x^2} + c \frac{f_{i+3} - 2f_i + f_{i-3}}{9\Delta x^2}$$

- Nombre d'onde modifié

$$\boxed{\begin{aligned} f &= \exp(ikx) \rightarrow f'' = -k'' \exp(ikx) \\ &\neq -k^2 \exp(ikx) \end{aligned}}$$

$$k'' \Delta x^2 = \frac{2a [1 - \cos(k\Delta x)] + \frac{b}{2} [1 - \cos(2k\Delta x)] + \frac{2c}{9} [1 - \cos(3k\Delta x)]}{1 + 2\alpha \cos(k\Delta x)}$$

→ singularité à $\alpha=1/2$ for $k=k_c$

Schéma compact pour la dérivée seconde

- 4 paramètres : a, b, c, α
- 4 conditions à vérifier

$$a+b+c=1+2\alpha \quad (\text{condition } \Delta x^2)$$

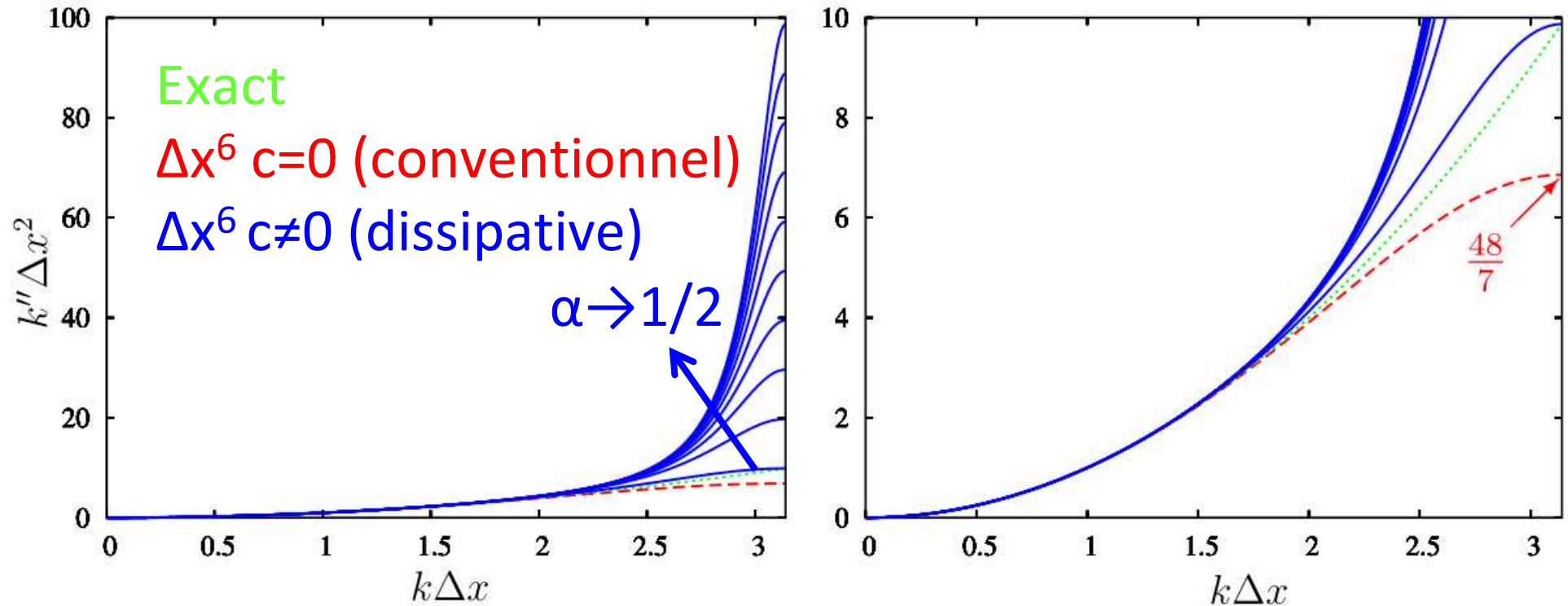
$$a+4b+9c=12\alpha \quad (\text{condition } \Delta x^4)$$

$$a+16b+81c=30\alpha \quad (\text{condition } \Delta x^6)$$

$$a+64b+729c=56\alpha \quad (\text{condition } \Delta x^8)$$

- Si la condition Δx^8 est sacrifiée, α peut être choisi librement tout en préservant la précision du 6e ordre
- Si la condition Δx^6 condition est sacrifié, α et un autre coefficient peuvent être choisis librement tout en préservant la précision du 4e ordre
- Le choix $\alpha \rightarrow 1/2$ donne $k'' \rightarrow \infty$ à $k \approx k_c$

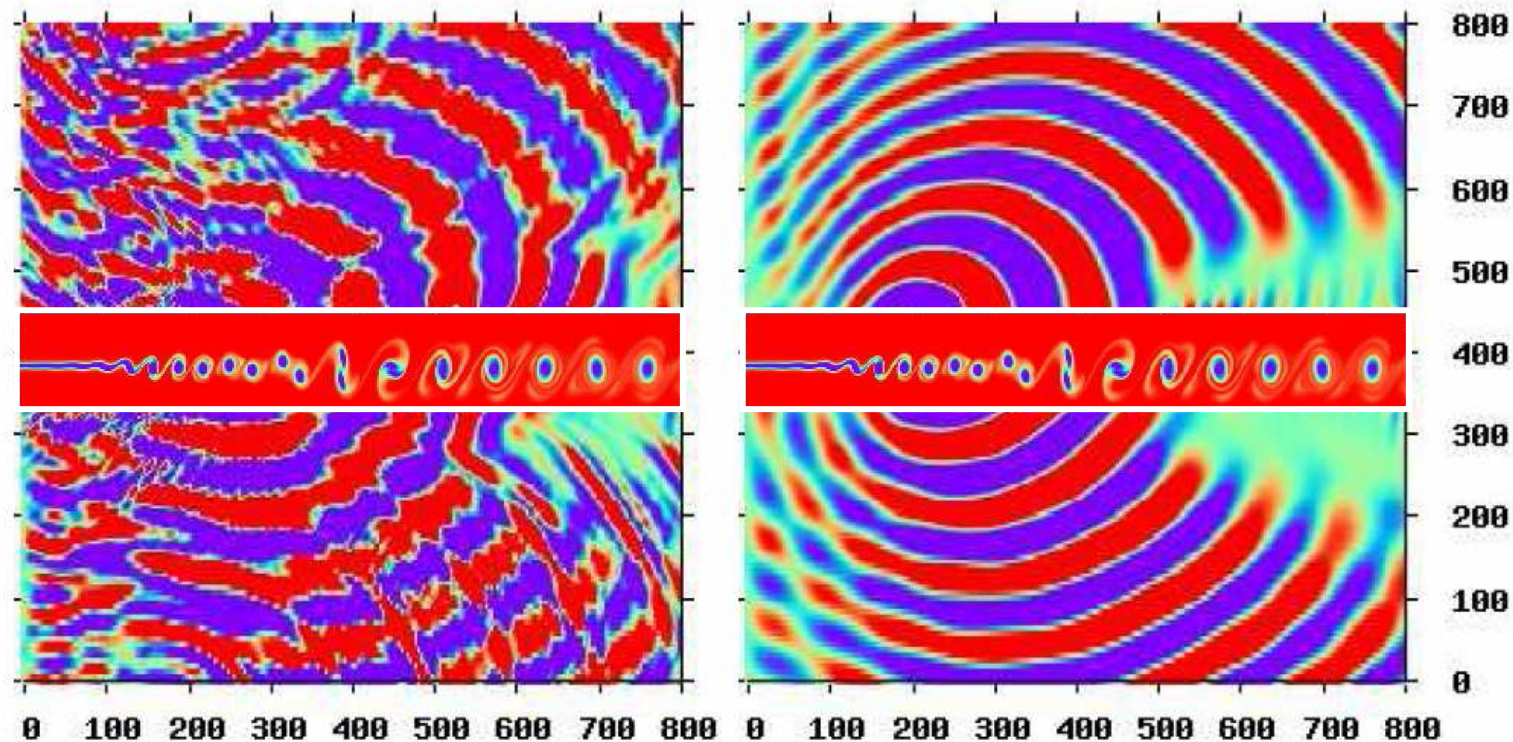
Nombre d'onde modifié



- Exacte différentiation donnée par $k''=k^2$
- Pour un schéma conventionnel $k'' < k^2$ près de la coupure
→ comportement sous-dissipatif
- Pour le présent schéma, $k'' \approx k^2$ sauf pour $k \approx k_c$ où $k'' \gg k^2$
→ comportement sur-dissipatif

Contrôle des ondes acoustiques “wiggles”

Calcul direct du son
dans une couche de mélange



Sans

dissipation numérique

Avec

dissipation numérique

$$n_x \times n_y = 1035 \times 431$$

Équivalence avec la viscosité spectrale

- La surestimation de k^2 revient à introduire une **viscosité spectrale**

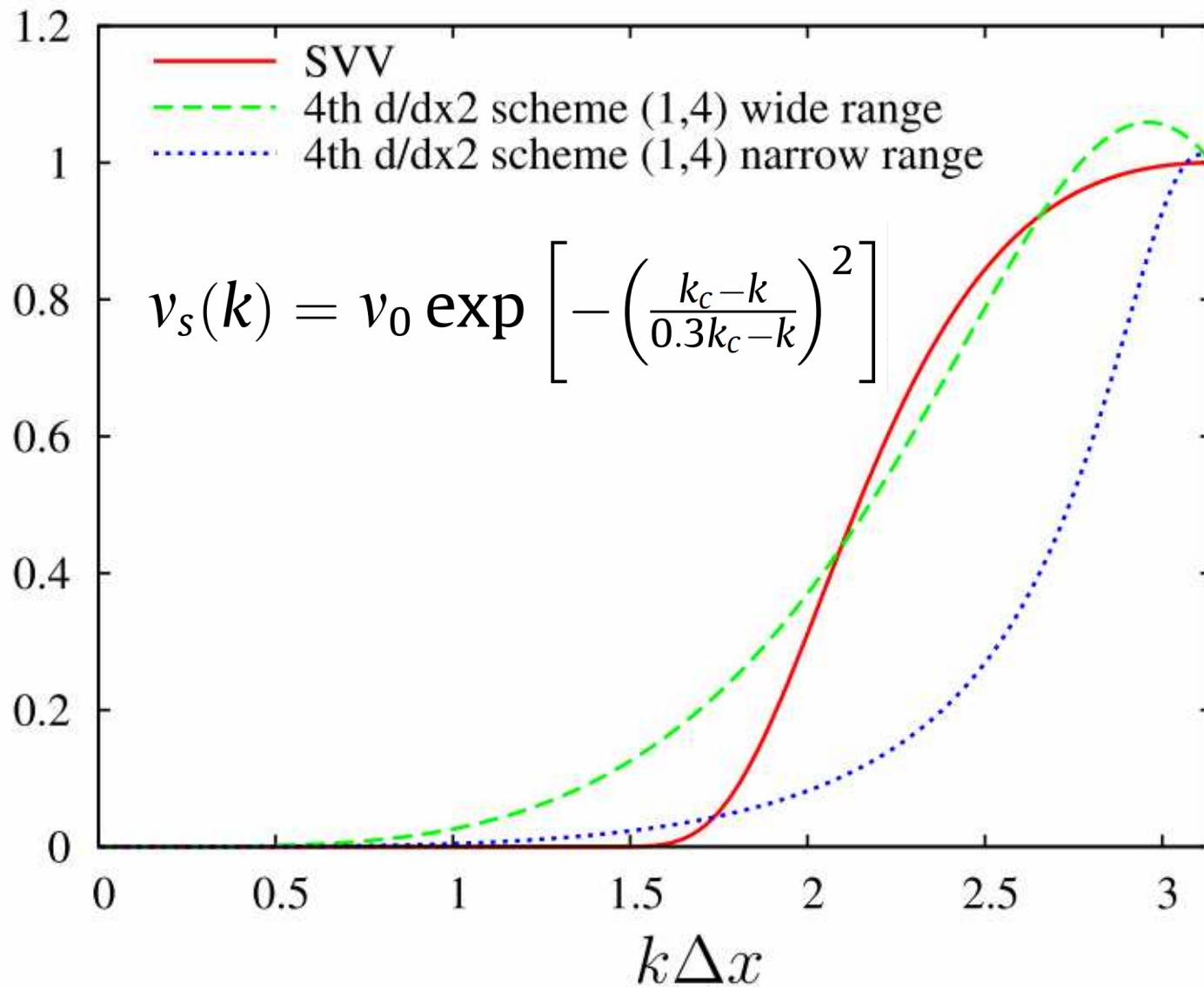
$$\nu_s'' = \nu(k'' - k^2)/k^2$$

- Utilisable pour imiter une **dissipation sous-maille**

- Hyperviscosité : $\nu_s = \nu_0 k^{2n-2}$

- Spectral Vanishing Viscosity : $\nu_s(k) = \nu_0 \exp \left[- \left(\frac{k_c - k}{0.3k_c - k} \right)^2 \right]$

Spectral Vanishing Viscosity (SVV)

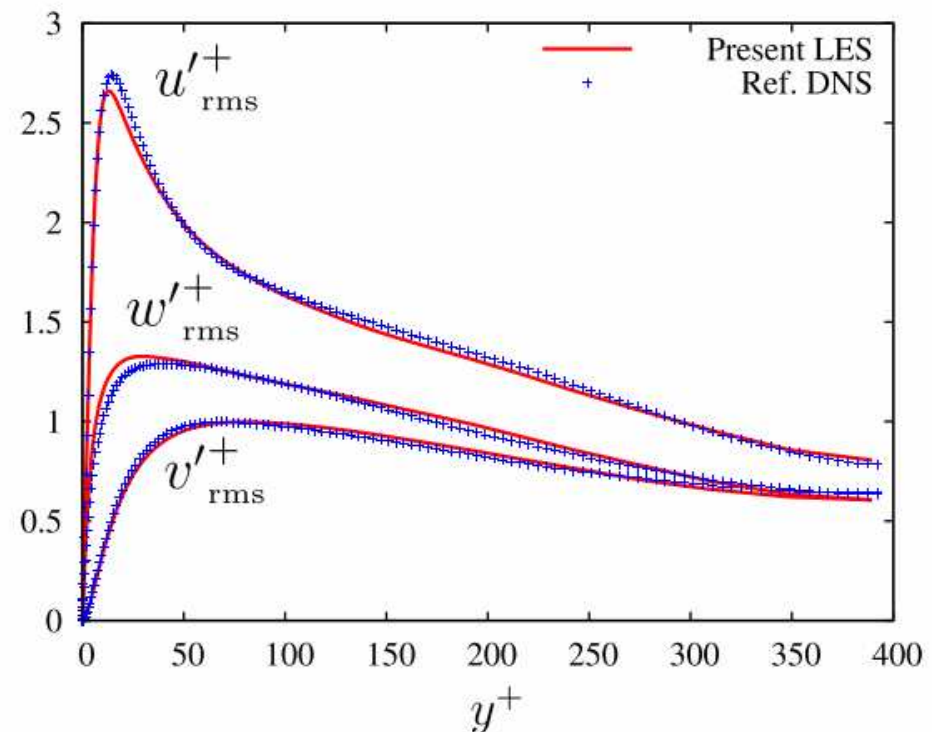
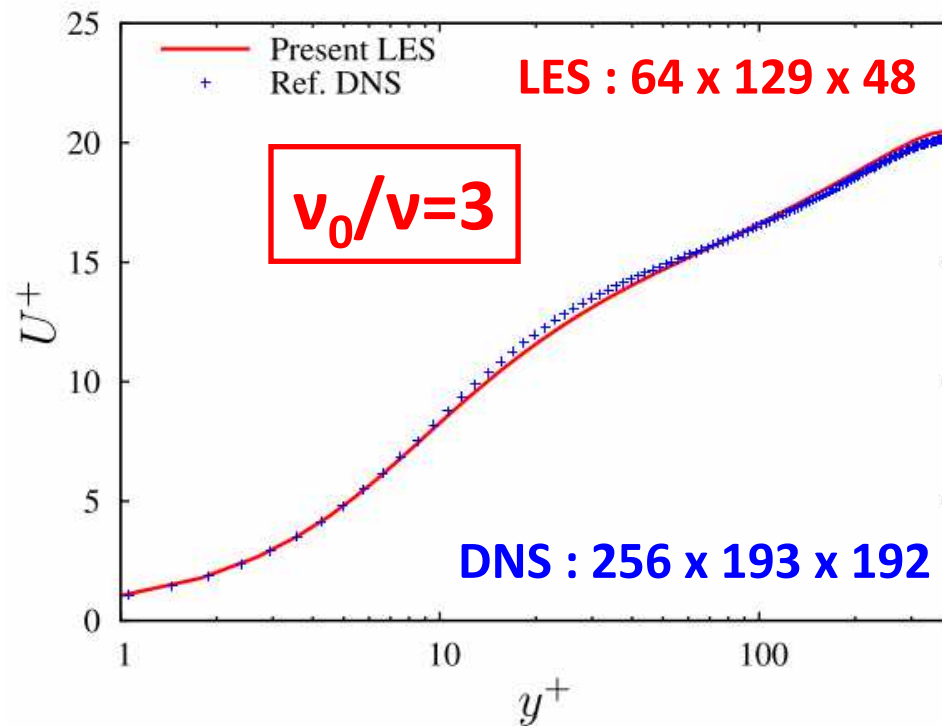




LES par SVV

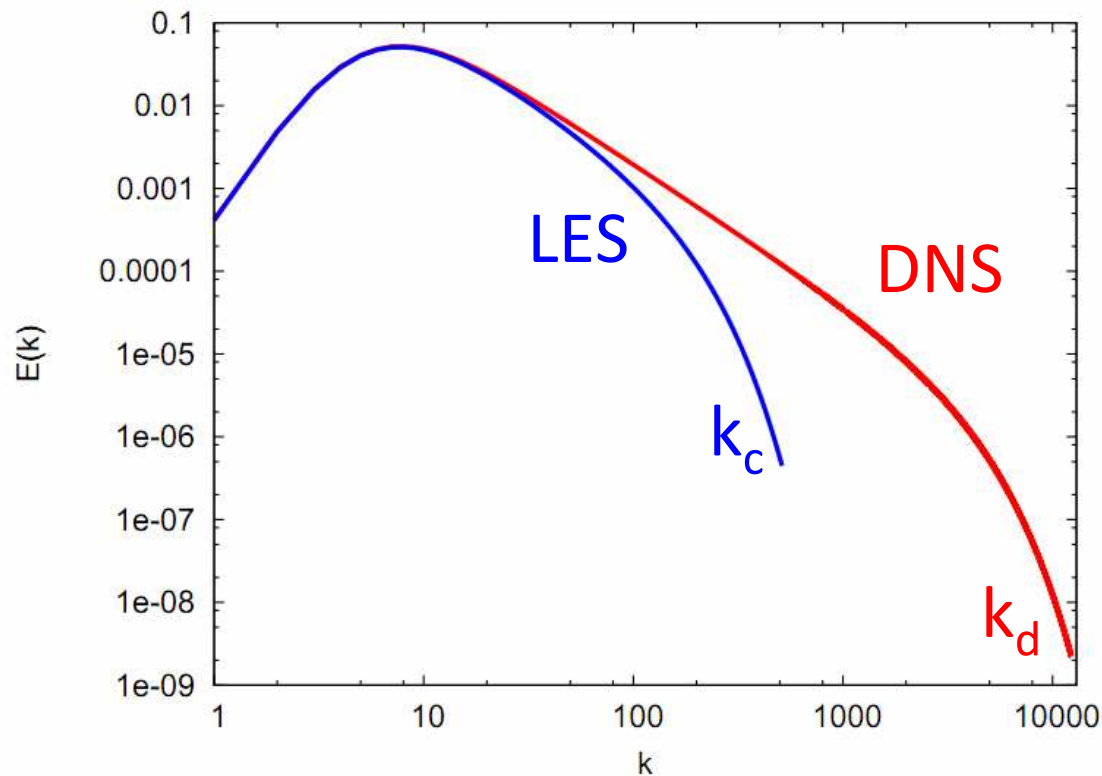
Canal turbulent

$$L_x \times L_y \times L_z = 2\pi h \times 2h \times \pi h$$



$v_0/\nu=?$ pour un jet libre

- DNS OK à $Re=10\,000$ en 1024^3
- **Objectif** : LES à $Re=700\,000$ en 1024^3



$$\frac{k_d}{k_i} \approx Re^{3/4}$$

$$Re=10\,000 \rightarrow 700\,000$$

$$\rightarrow \frac{k_d}{k_c} \approx 24$$

- **Référence** : DNS à $Re=700\,000$ en 24576^3

$v_0/v=?$ pour un jet libre

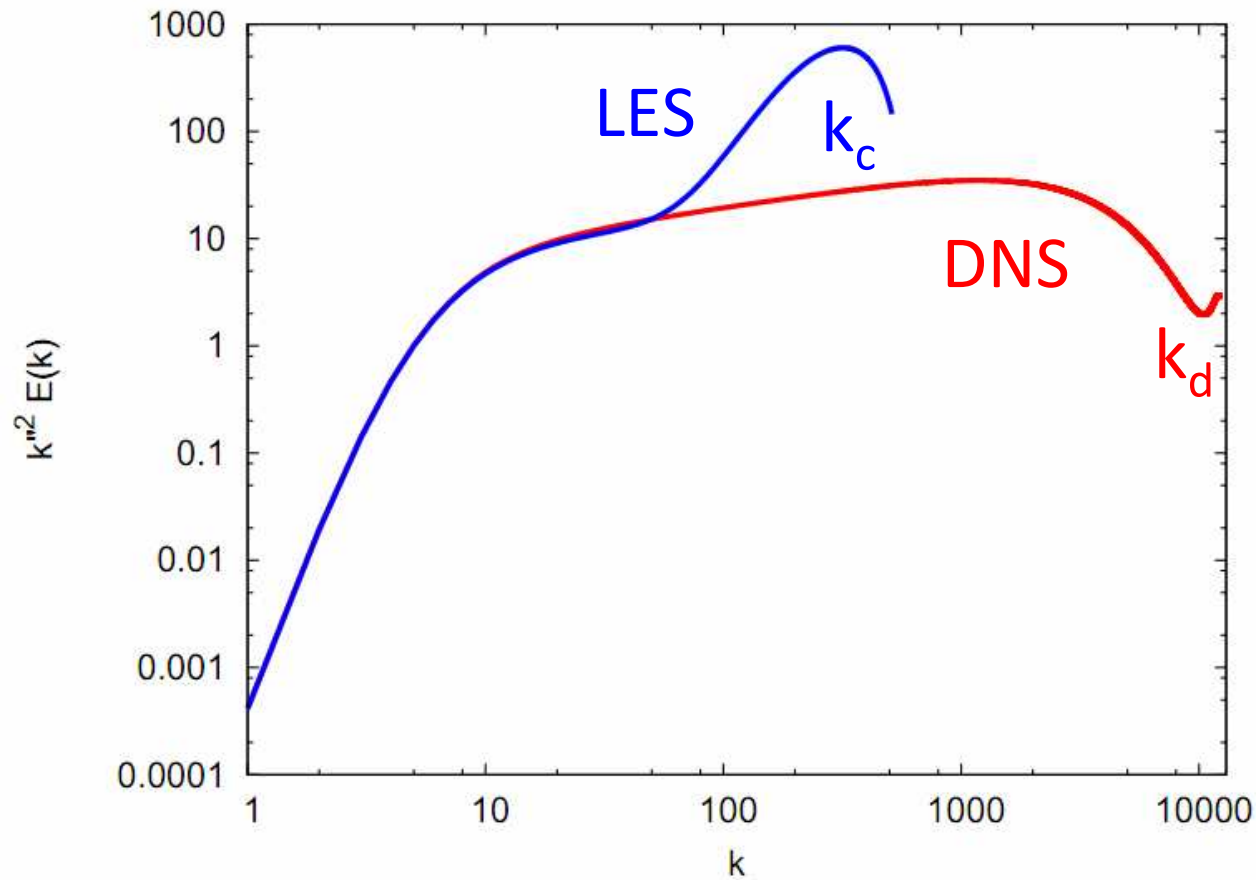
- Dissipation DNS : $\varepsilon_{DNS} = 2\nu \int_0^{k_d} k''_{DNS} E(k) dk$
- Dissipation LES : $\varepsilon_{LES} = 2\nu \int_0^{k_c} k''_{LES} E(k) dk$

- Hypothèse : **Spectre de von Karman-Saffman**

$$E(k) = 1.45 \frac{\overline{u'^2}}{k_e} \frac{(k/k_e)^4}{\left(1 + (k/k_e)^2\right)^{(17/6)}} \exp\left(-\frac{9}{4} \left(\frac{k}{k_d}\right)^{4/3}\right)$$

- Principe : $\varepsilon_{LES} = \varepsilon_{DNS}$
- Résultat : $\rightarrow v_0/v$

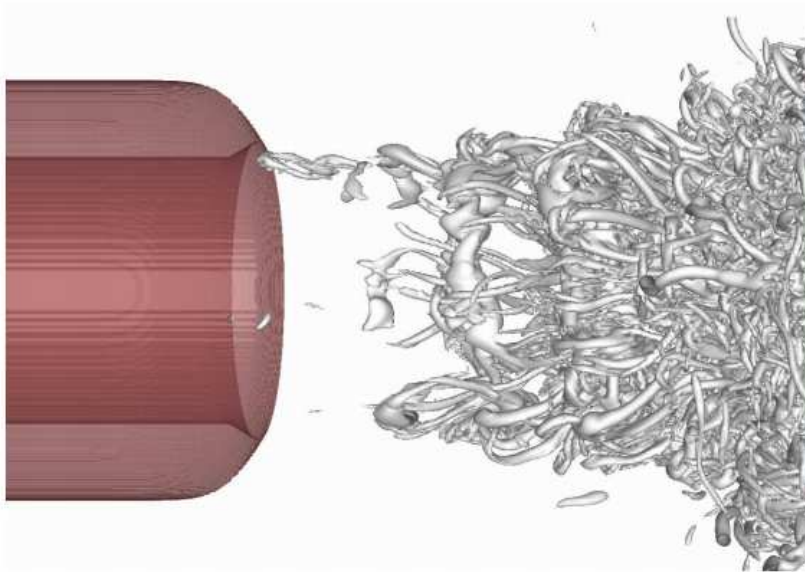
$v_0/\nu = ?$ pour un jet libre



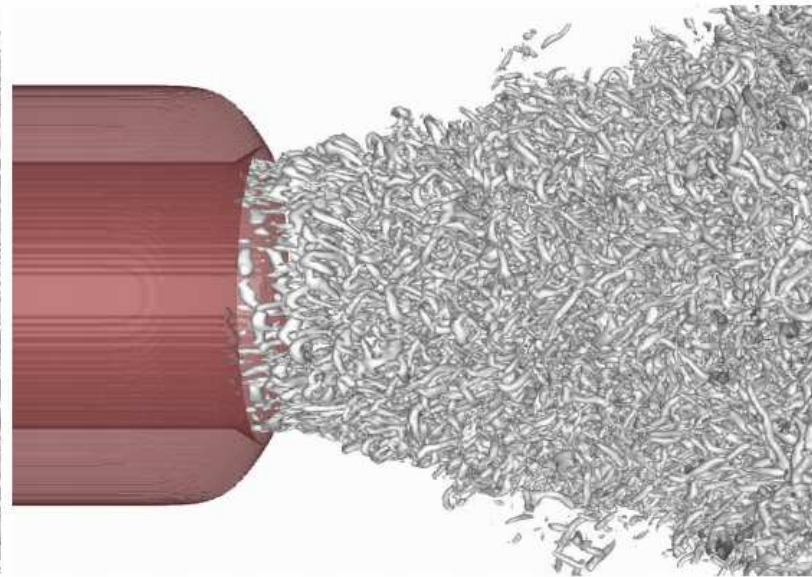
$\rightarrow v_0/\nu = 1240$

Résultats

DNS Re=10 000



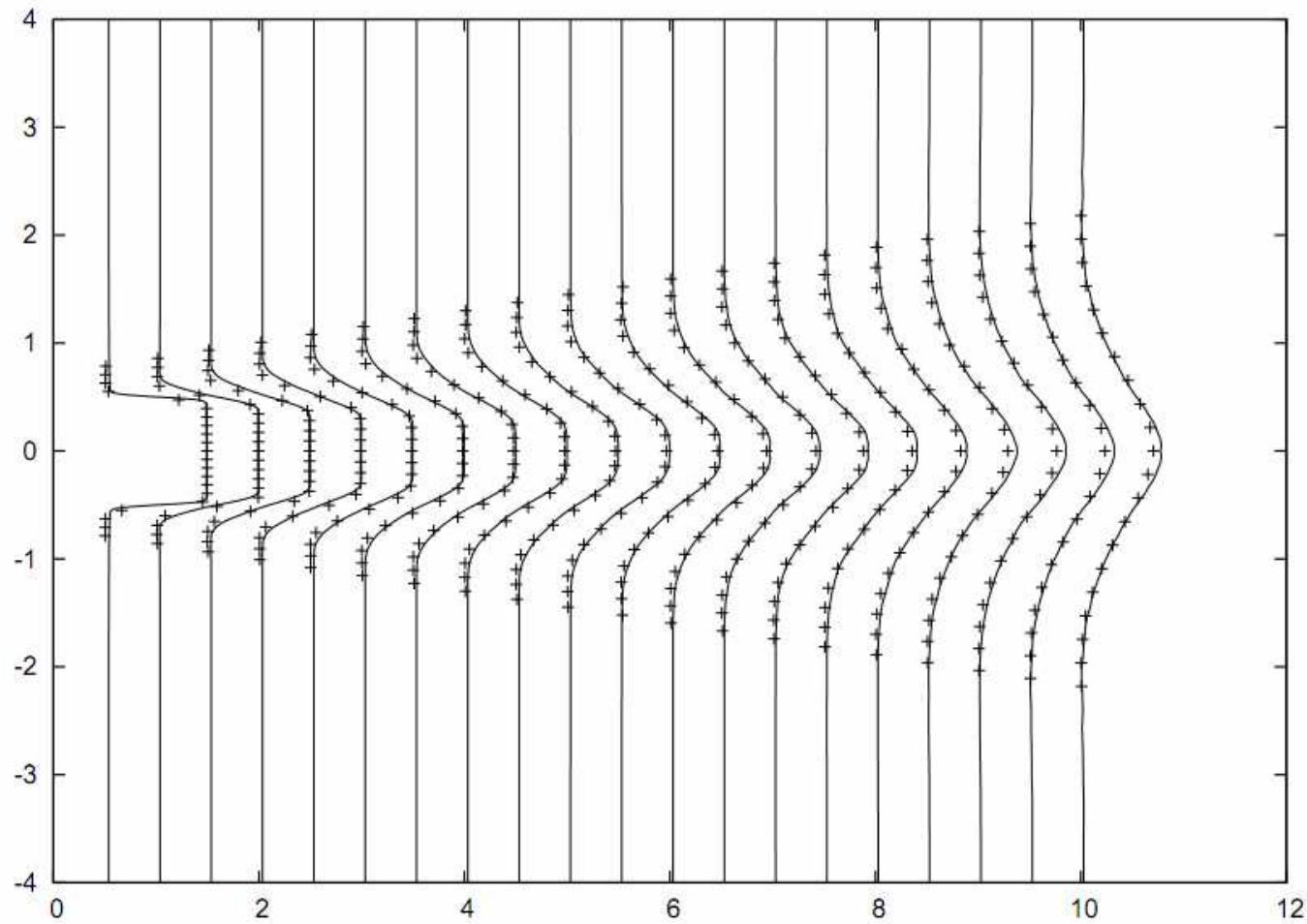
LES Re=1 000 000



Critère Q

Résultats

Profils U

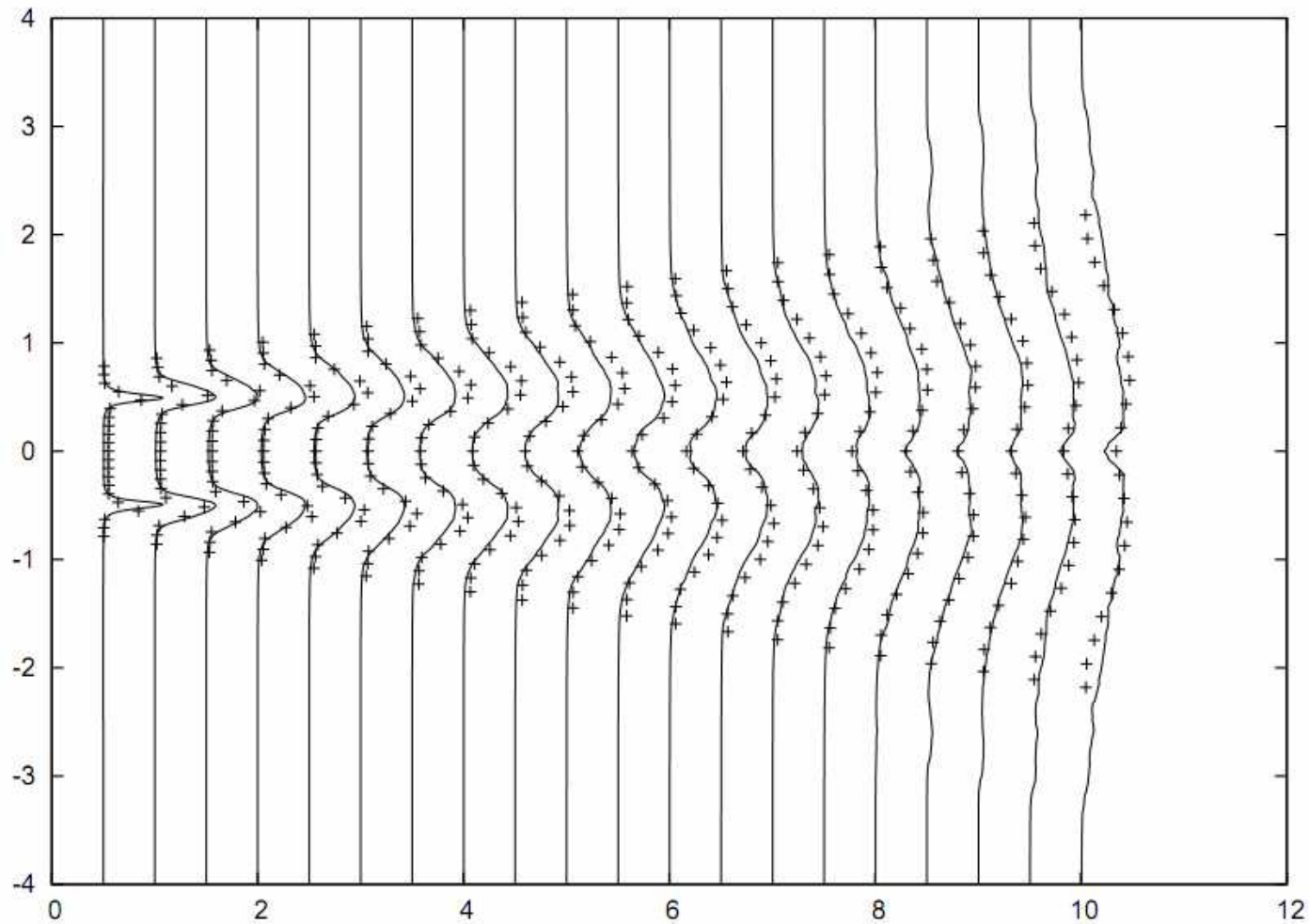


+ : Exp. P'
Re=700 000

— : LES
Re=700 000

Résultats

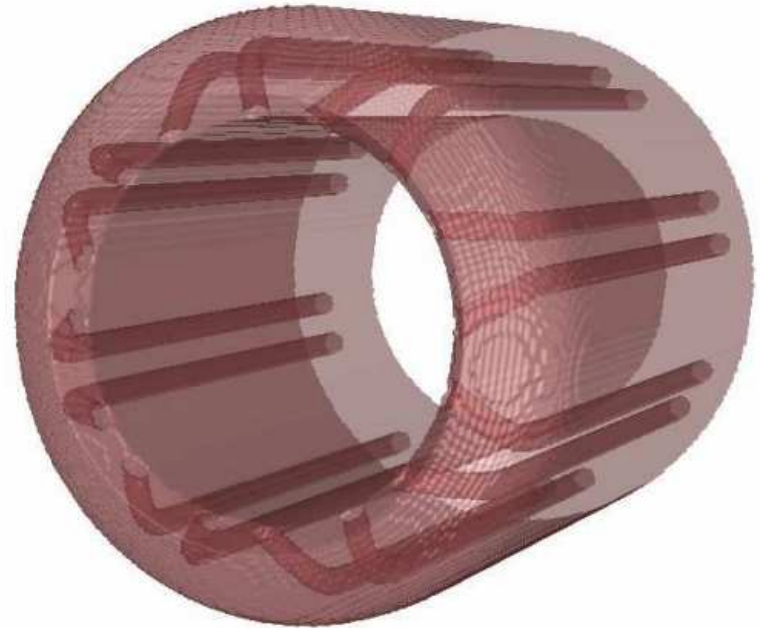
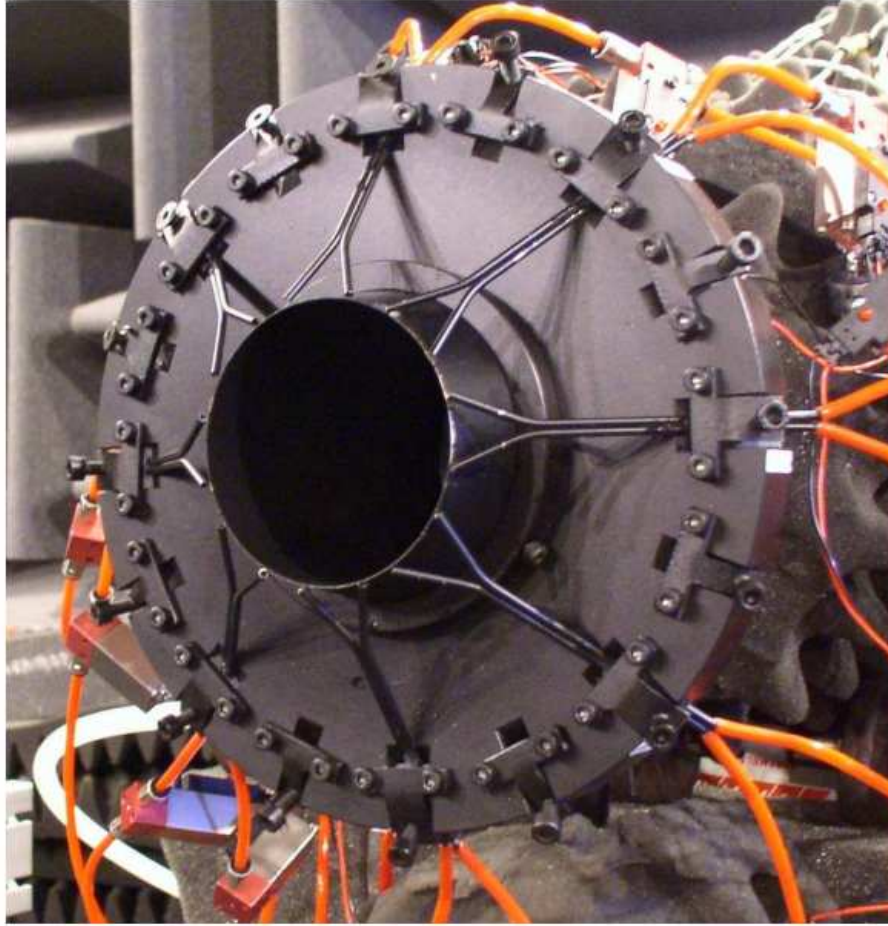
Profils u'_{rms}



+ : Exp. P'
Re=700 000

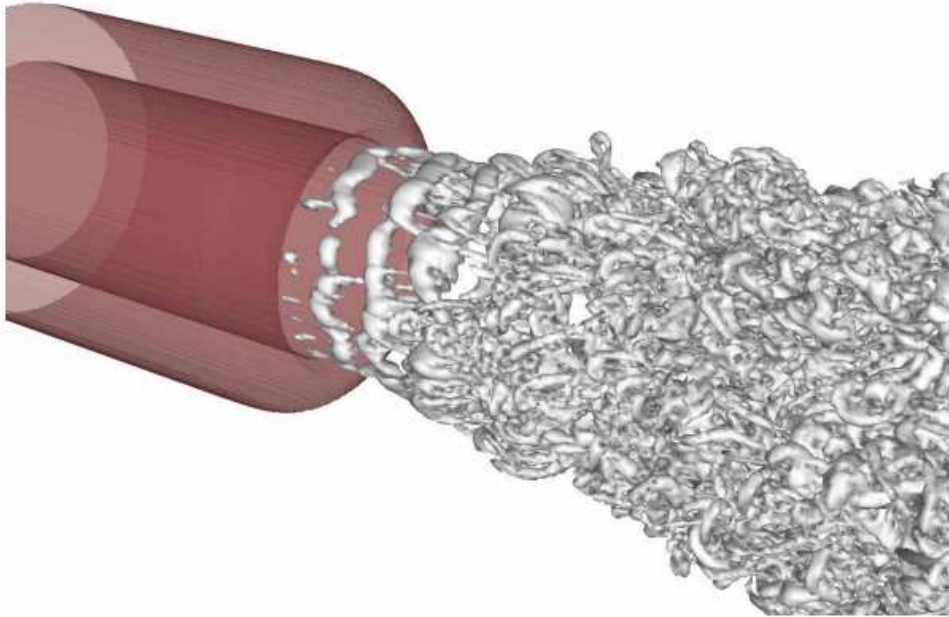
— : LES
Re=700 000

Contrôle d'un jet par micro-jets

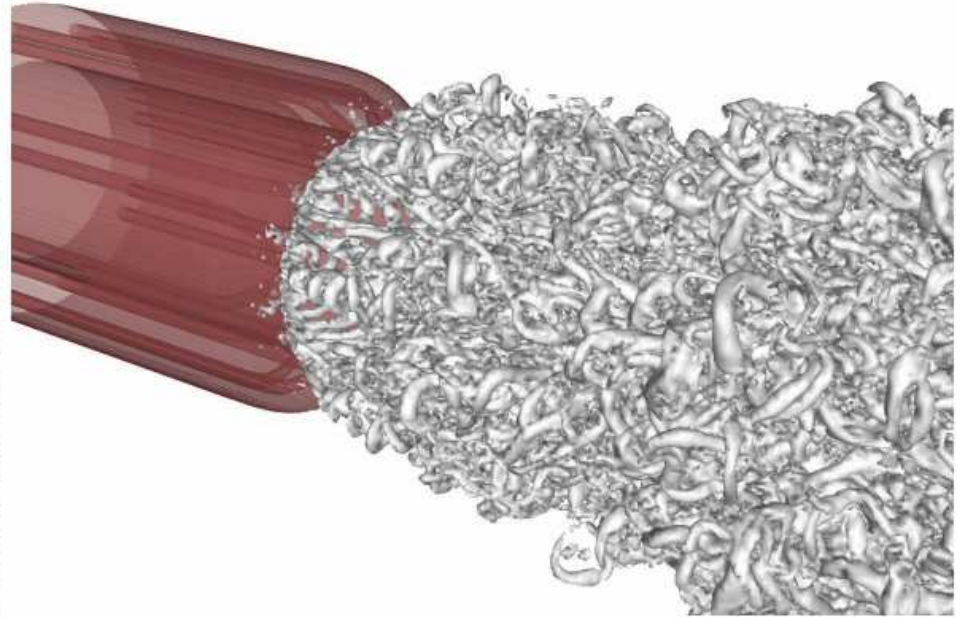


Le « fluidvtron »

Contrôle d'un jet par micro-jets



Sans micro-jets
Jet naturel



Avec micro-jets
Jet contrôlé

Conclusion

- Erreur numérique $\rightarrow$ dissipation artificielle
- Viscosité numérique spectrale « à la carte »

**Dissipation numérique contrôlée par la physique
 $\approx$ modèle sous-maille**

