Exposé d'introduction – GDR Turbulence
22–23 Octobre 1998, Paris

INFLUENCE DES GRANDES ECHELLES SUR LE MELANGE TURBULENT D'UN SCALAIRE PASSIF

Fabien ANSELMET, Luminita DANAILA, Patrice LE GAL
I.R.P.H.E., 12 Avenue Général Leclerc, 13003 Marseille

Résumé: Les propriétés du mélange turbulent d'un scalaire passif ont été étudiées théoriquement et expérimentalement. Il s'avère que, pour un tel scalaire, l'isotropie locale n'est pas un état naturel, et que le bilan moyen d'énergie à chaque échelle – tel qu'il est donné par l'équation de Yaglom – n'est en général pas bien respecté. Nous devons donc tenir compte des grandes échelles afin de décrire correctement l'équilibre du mélange. Il s'agit de la non–stationnarité dans la turbulence de grille, et du gradient moyen de température dans un mélange en présence d'un tel gradient.

1 Introduction

La théorie de la turbulence, développée en 1941 par Kolmogorov [8] (voir aussi Monin & Yaglom 1975 [9]) pour prendre en compte de façon statistique les processus qui régissent le transfert d'énergie depuis les grandes échelles où celle-ci est produite jusqu'aux plus petites échelles où elle est dissipée par effet du frottement visqueux, est basée sur l'hypothèse que, pour des nombres de Reynolds suffisamment grands, et quel que soit l'écoulement, on peut définir trois gammes d'échelles bien séparées :
–les grandes échelles, forcément spécifiques à chaque écoulement, responsables de la production d'énergie turbulente à un taux $\langle\epsilon\rangle$;
–des échelles intermédiaires, qui définissent la *zone inertielle*, et qui ont des propriétés universelles (c'est à dire indépendantes de l'écoulement considéré ainsi que du nombre de Reynolds) ne dépendant que du taux moyen de transfert de l'énergie, égal lui aussi à $\langle\epsilon\rangle$ bien-sûr;
–les plus petites échelles, qui définissent la *zone dissipative*, et dont les propriétés, universelles elles-aussi, dépendent à la fois de $\langle\epsilon\rangle$ (qui est bien-sûr aussi égal au taux de dissipation de l'énergie) et de la viscosité cinématique ν.
Pour les échelles correspondant aux régimes inertiel et dissipatif, la turbulence est, de plus, supposée homogène et isotrope.

Même si, dans la réalité, on commence à s'apercevoir, à la fois à partir de données expérimentales et à l'aide de simulations numériques, que l'hypothèse d'universalité n'est pas toujours valable, ce cadre théorique reste encore, et de loin, le plus solide en turbulence. Néanmoins, et de façon assez surprenante, les plus grands écarts ont été constatés lors des études sur un scalaire passif transporté (ou mélangé) par un écoulement turbulent. Ainsi, si dans les années 1950-70, les extensions au problème du scalaire passif de la théorie de Kolmogorov proposées par Oboukhov et par Corrsin (voir Monin & Yaglom 1975 [9]) semblaient assez bien vérifiées, il est apparu ensuite que, par exemple, les moments d'ordre impair des incréments de température (ou différences de température entre deux points séparés d'une distance $\vec{r}$, $\Delta\theta = \theta(\vec{x}+\vec{r}) - \theta(\vec{x})$) étaient non nuls dans la plupart des écoulements étudiés, traduisant un défaut flagrant d'isotropie pour les petites échelles et celles de la zone inertielle.

Cependant, même dans les cas isotropes, c'est l'intermittence interne qui constitue la principale insuffisance de la théorie de Kolmogorov. Celle–ci a été associée à la répartition non uniforme en espace et en temps du taux de transfert de l'énergie cinétique de la turbulence. Différents modèles plus ou moins sophistiqués (et qui seront aussi englobés sous le terme de théories "à la Kolmogorov" car elles ne remettent pas en cause les hypothèses *d'homogénéité, d'isotropie et d'universalité* postulées en 1941) ont été proposés pour prendre en compte l'intermittence interne (voir les revues récentes de Frisch 1995 [7] ou Sreenivasan & Antonia 1997 [13]), dont la manifestation la plus connue est l'aspect non–Gaussien, avec des ailes fortement étirées pour les petites échelles, des densités de probabilité (ou pdf) des incréments de vitesse Δu ou de température (voir par exemple Anselmet et al. 1984 [1]). Comprendre l'origine de l'intermittence interne constitue encore actuellement un grand défi pour les théoriciens, puisque la plupart des modèles proposés jusqu'à présent sont essentiellement phénoménologiques, et donc très éloignés des propriétés mathématiques des équations du mouvement. De ce point de vue, le scalaire passif présente l'avantage que son équation d'évolution, l'équation de la chaleur, est beaucoup plus simple que les équations de Navier-Stokes, la vitesse étant un vecteur. Le scalaire est donc un très bon candidat pour le développement d'approches de l'intermittence qui seraient vraiment basées sur les équations du mouvement.

2 Etude de l'équation d'évolution à travers les échelles de la PDF des incréments de température

Dans cet esprit, une équation d'évolution à travers les échelles de la fonction de densité de probabilité $P(\Delta\theta, r)$ des incréments de température a été développée en 1994 à l'IRPHE par S. Vaienti et ses collaborateurs [14]:

$$\left[\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right](P(X,r)q_1(X,r)) + 2k_0\frac{\partial^2}{\partial X^2}(P(X,r)q_2(X,r)) = 2k_0\left[\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right]\frac{\partial}{\partial r}P(X,r), \quad (1)$$

où nous avons noté $X \equiv \Delta\theta$, et k_0 représente le coefficient de diffusion moléculaire.

Cette équation est obtenue en supposant *l'isotropie tridimensionnelle de l'écoulement*, ce qui implique, notamment, que les pdfs P sont symétriques à toutes les échelles. La fermeture du problème se réduit à la détermination de deux fonctions, exprimées en termes de moyennes conditionnelles:

$$q_1 = \langle \Delta u | \Delta\theta \rangle,$$

pour les incréments de vitesse longitudinale conditionnés par les incréments de température, traduisant le couplage entre les champs dynamique et thermique, et

$$q_2 = \langle (\nabla\theta)^2 | \Delta\theta \rangle,$$

pour le gradient carré de la température, conditionné par les incréments de température, reliée aux mécanismes dissipatifs. Faute d'expression théorique, ces grandeurs ont été pour l'instant obtenues à partir de mesures. Une première étude de l'équation de Vaienti et al., ainsi que l'évaluation des deux moyennes conditionnelles à partir de mesures dans une couche limite chauffée et dans un jet chauffé, ont été réalisées par Ould–Rouis [10]. Pour cela, il a fallu mesurer simultanément la vitesse et la température, et calculer les deux moyennes conditionnelles, ainsi que la pdf.

La première partie du travail présenté ici (voir [2]) a donc constitué en l'approfondissement de ces travaux. L'objectif principal était alors de tenter de résoudre numériquement l'équation d'évolution de la pdf, en utilisant les données expérimentales disponibles (q_1 et q_2), et de voir si, effectivement, cette approche était capable de reproduire la déformation des pdfs P lorsque l'échelle considérée est de plus en plus petite. Cet objectif a été *pleinement atteint*, comme le montre la figure 1 (pour des données issues de simulations numériques) où les pdfs calculées numériquement sont en très bon accord avec les pdfs réelles. Néanmoins, la gamme d'échelles où l'équation de Vaienti et al. est vérifiée est souvent limitée aux petites échelles; son étendue dépendant du nombre de Reynolds de l'écoulement.

Une première difficulté a été que, pour l'expérience de couche limite faiblement chauffée, l'anisotropie est vraiment un état naturel puisque la moyenne conditionnelle q_1 devient symétrique seulement vers les plus petites échelles, tandis que l'asymétrie de la pdf reste très forte aux plus petites échelles. Une image simple du champ de température, permettant l'explication des valeurs non–nulles des moments d'ordre impair des incréments de température à petite échelle, est le modèle des *rampes de température* (voir Sreenivasan 1991 [12], Sreenivasan & Antonia 1997 [13]). L'orientation des rampes est alors donnée par le signe du gradient moyen de température multiplié par le signe du cisaillement. Ainsi, ces rampes constituent une manifestation du rôle essentiel des grandes échelles sur le mélange du scalaire passif.

Comme nous étudions des équations écrites avec des hypothèses d'isotropie tridimensionnelle, alors que nous disposions de données pour un cas non–isotrope, nous avons été obligés de symétriser la pdf ainsi que les moyennes conditionnelles. Dans ces conditions, l'équation de Vaienti et al. est bien vérifiée, mais *toujours* pour une gamme d'échelles limitée. Dans ce domaine de "validation", sa solution numérique se compare néanmoins très favorablement aux pdfs correspondantes. Le même résultat est obtenu en étudiant cette équation pour des données provenant des simulations numériques (DNS) de A. Pumir ([11]), comme le montre la figure 1. Ainsi, l'équation de Vaienti et al. constitue effectivement un très bon outil pour analyser – et surtout prédire, aux fermetures q_1 et q_2 près, ce qui fait la très grande originalité de cette approche – le détail fin des propriétés des petites échelles, même si, pour les mélanges générés par un gradient moyen de température, $\vec{G}$, que nous avons étudiés (voir Danaila et al., 1997 [4]), le domaine de validité est en gros limité aux échelles de la zone dissipative. La restriction à l'ordre deux de l'équation de la pdf, qui conduit à l'équation bien–connue de Yaglom (voir Monin & Yaglom 1975 [9]), représente le bilan à chaque échelle de l'énergie thermique moyenne, et elle n'est donc aucunement sensible aux effets de l'intermittence. Son domaine de vérification est, pour les mêmes données, identique à celui obtenu pour l'équation de Vaienti et al.

La non–vérification de ces équations pour les échelles inertielles et grandes a été attribuée *dans un premier temps* au fait que l'isotropie du champ scalaire, aux nombres de Reynolds usuels, est respectée uniquement aux petites échelles. C'est pourquoi des mesures ont ensuite été effectuées dans l'écoulement entre deux disques contra–rotatifs, dont l'un était chauffé et l'autre refroidi, ce qui a permis, en jouant sur les conditions à grande échelle, d'obtenir, dans une région centrale, des propriétés statistiques en bon accord avec les contraintes d'isotropie. Les deux équations (celle de Vaienti et al. et celle de Yaglom) sont alors vérifiées pour une gamme d'échelles plus étendue, bien qu'encore limitée aux échelles inférieures aux grandes échelles d'injection (Danaila et al. 1999 [6]). La non–vérification de ces équations aux grandes échelles, malgré les propriétés quasi–isotropes de ce mélange, est donc vraisemblablement liée aux propriétés des échelles d'injection, qui n'étaient (naturellement) pas prises en compte jusqu'à présent.

3 Etude de l'influence des grandes échelles dans la turbulence de grille, et dans un mélange généré par un gradient moyen de température

Dans la deuxième partie du travail présenté ici, nous allons examiner deux cas pour lesquels il est possible de sortir assez simplement du domaine classique des théories "à la Kolmogorov", afin d'initier une approche analytique permettant de tenir compte explicitement de l'influence des grandes échelles sur les propriétés statistiques des échelles de la zone inertielle. Pour cela, il faut "tout reprendre à la base", à partir des équations fondamentales (de la chaleur, ou de Navier–Stokes), et retravailler les hypothèses nécessaires à la déduction des équations caractérisant le bilan énergétique entre échelles.

Une telle démarche a tout d'abord été menée pour le cas d'un écoulement académique, la turbulence de grille. Cet écoulement est caractérisé par la *la non–stationnarité, ou la non–homogénéité sur l'axe du courant moyen*, de toutes les grandeurs statistiques. C'est cette propriété que l'on doit donc assimiler dans nos calculs. L'équation de Yaglom et celle de Kolmogorov (cette dernière constituant le bilan à chaque échelle de l'énergie moyenne du champ dynamique) ne sont en effet pas vérifiées pour des nombres de Reynolds modérés. Pourtant, la plupart des tests classiques d'homogénéité et d'isotropie sont bien satisfaits dans cet écoulement. Ce résultat traduit donc l'existence d'une corrélation non–négligeable entre les échelles d'injection, de transfert et de dissipation de l'énergie, et ce d'autant plus que le nombre de Reynolds est faible. Pour tenir compte de ce phénomène, des formes généralisées des équations de Yaglom et de Kolmogorov ont été établies et ensuite validées expérimentalement, Danaila et al. 1998 [5].

L'équation de Yaglom,

$$-\langle \Delta u (\Delta\theta)^2 \rangle + 2k_0 \frac{d}{dr} \langle (\Delta\theta)^2 \rangle = \frac{4}{3} \langle \epsilon_\theta \rangle r,$$

où $\langle \epsilon_\theta \rangle$ est le taux moyen de dissipation de la température, est écrite dans sa forme classique sous la forme compacte:

$$A + B = \frac{4}{3} r^*,$$

où r^* désigne une échelle r normalisée par η. Cette équation a été généralisée, en ajoutant un terme source S^*, qui traduit la décroissance des moments d'ordre deux en aval de la grille. La figure 2 illustre l'aspect de ce nouveau terme, ainsi que le très bon accord que nous obtenons en prenant en compte correctement cet aspect relié à la non–stationnarité, caractéristique essentielle de la manière dont l'énergie se transmet à travers les échelles en turbulence de grille.

Pour un cas encore plus complexe, le mélange généré par un gradient moyen de température ($\vec{G}$), il est nécessaire de prendre en compte à la fois la *non–homogénéité et l'anisotropie* sur une direction parallèle à $\vec{G}$. L'isotropie tridimensionnelle doit être relaxée à une isotropie bidimensionnelle, valable dans un plan perpendiculaire à $\vec{G}$. Ainsi, nous sommes amenés à nous écarter encore plus des théories "à la Kolomogorov": si, jusqu'à présent, nous avions pris en compte le rôle des grandes échelles tout en gardant l'hypothèse d'isotropie 3–D, maintenant, nous tenons compte des grandes échelles, mais en relaxant l'hypothèse d'isotropie à une isotropie 2–D. En utilisant cette hypothèse, il est possible d'obtenir des formes généralisées de l'équation de Yaglom et de l'équation de Vaienti et al., que nous vérifions sur toute la gamme d'échelles disponibles. Le comportement non–universel dans la zone inertielle a été alors expliqué par la présence de $\vec{G}$, voir Danaila 1998 [3].

4 Conclusion

Les travaux présentés ici montrent donc que l'équation de Vaienti et al. constitue – aux fermetures q_1 et q_2 près, qui ont été pour l'instant obtenues à partir de données expérimentales ou issues de simulations numériques – un outil prédictif et pas seulement un moyen de décrire, *a posteriori*, la réalité. Néanmoins, dans les situations habituelles où les nombres de Reynolds sont en général modérés, une description correcte et complète des propriétés à petite échelle d'un mélange turbulent doit prendre en compte ses caractéristiques aux grandes échelles. Ceci a pour l'instant pu être réalisé pour deux situations pas trop complexes, la turbulence de grille et un écoulement (simulé numériquement) avec un gradient moyen de température. D'autres cas sont en cours d'analyse.

Les auteurs remercient chaleureusement les personnes qui ont contribué au développement de ce travail: R.A. Antonia, C. Brun, J. Dusek, J.F. Pinton, F. Plaza et A. Pumir.

References

[1] Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E.J. et Antonia R.A.; 1984, High–order velocity structure functions in turbulent shear–flows, J. Fluid Mech., 140, pp. 63–89.

[2] Danaila L.; 1998, Influence des grandes échelles sur le mélange turbulent d'un scalaire passif, Thèse de 3$^{\text{ème}}$ Cycle, Université d'Aix–Marseille II.

[3] Danaila L.; 1998, A generalization of Yaglom's equation in a mean–temperature gradient mixing, soumis à Phys. of Fluids.

[4] Danaila L., Anselmet F., Le Gal P., Dusek J.,Brun C. et Pumir A.; 1997, Predictions of small–scale statistics for a passive scalar in turbulent mixing, Phys. Rev. Lett., 23, pp. 4577–4580.

[5] Danaila L., Anselmet F., Zhou T. et Antonia R.A.; 1998, A generalization of Yaglom's equation which accounts for the large–scale forcing in heated decaying turbulence, soumis à J. Fluid Mech.

[6] Danaila L., Le Gal P., Anselmet F., Plaza F. et Pinton J.F.; 1999, Some new features of the passive scalar mixing in a turbulent flow, à paraître dans Phys. of Fluids.

[7] Frisch U.; 1995, Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov, Cambridge University Press, Cambridge MA.

[8] Kolmogorov A.N.; 1941, Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30, 299.

[9] Monin A.S. et Yaglom A.M.; 1975, Statistical Fluid Mechanics, MIT Press, Cambridge MA.

[10] Ould-Rouis M.; 1995, Intermittence interne pour un scalaire passif en turbulence pleinement développée , Thèse de 3$^{\text{ème}}$ Cycle, Université d'Aix–Marseille II.

[11] Pumir A., 1994, "A numerical study of the mixing of the passive scalar in three dimensions in the presence of a mean gradient", *Phys. of Fluids*, **6**, 2118.

[12] Sreenivasan K.R.; 1991, On local isotropy of passive scalars in turbulent shear flows, Proc. R. Soc. Lond. A, 434, 165.

[13] Sreenivasan K.R. et Antonia R.A.; 1997, The phenomenology of small scale turbulence, Ann. Rev. Fluid Mech., 29, 435.

[14] Vaienti S., Ould-Rouis M., Anselmet F. et Le Gal P.; 1994, Statistics of temperature increments in fully developped turbulence: Part 1: theory, Physica D, 73, 99.

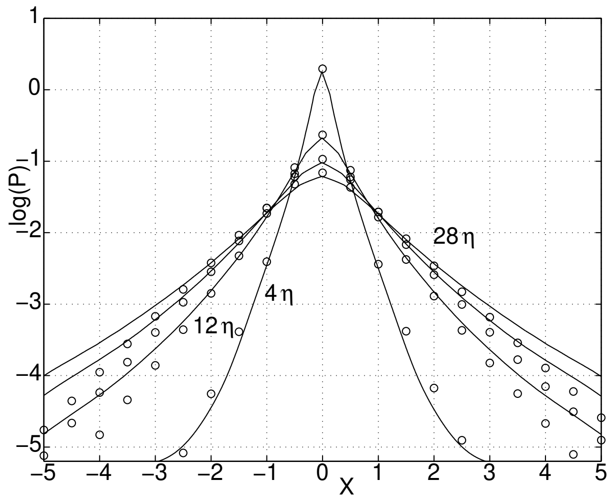

Figure 1: *Densités de probabilité pour les données DNS (○) et solutions numériques de l'équation pour P (trait continu) en échelles semi–logarithmiques, pour différentes échelles (entre 4η et 28η). η est l'échelle, appelée de Kolmogorov, où la dissipation moléculaire agit. La taille du domaine de calcul correspond à 36η. D'après Danaila et al. 1997 [4].*

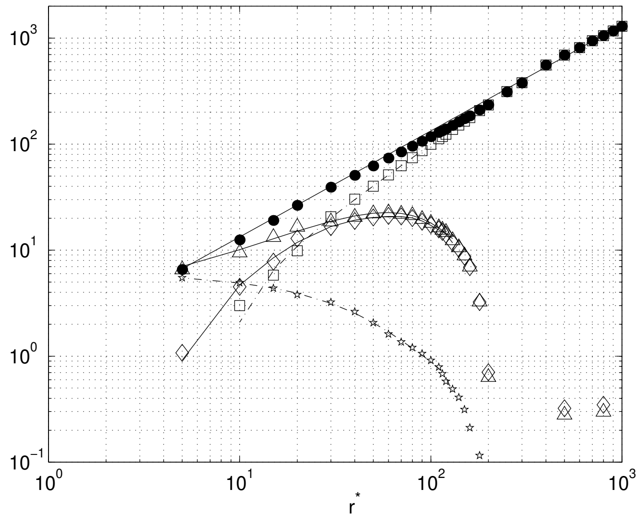

Figure 2: *Vérification de l'équation de Yaglom généralisée: A (◊) représente le transport turbulent par couplage avec la vitesse, B ($\star$) représente la diffusion moléculaire aux petites échelles, la ligne droite est $4/3r^*$. □ représente le terme source S^*, △ représente $A + B$, et ● est utilisé pour $A + B + S^*$. D'après Danaila et al. 1998 [5].*