

Une représentation stochastique de la structure locale de la turbulence.

Laurent Chevillard, Raoul Robert, Vincent Vargas.

Nous sommes ici intéressés à construire un champ vectoriel capable de reproduire les principales propriétés statistiques de la turbulence tri-dimensionnelle. Parmi ces propriétés empiriques de la turbulence, citons notamment l'alignement préférentiel de la vorticité avec le vecteur propre intermédiaire (i.e. Associé à la seconde valeur propre) de la déformation, le caractère asymétrique (i.e. La skewness) des fluctuations longitudinales de la vitesse lié au transfert d'énergie vers les petites échelles, l'intermittence et les propriétés de corrélations à longue portée.

La première étape de construction de ce champ consiste en la linéarisation des équations d'Euler aux temps courts. Cette étape permet d'accéder analytiquement à la déformation d'un champ gaussien par un champ de déformation statique. Ce calcul simple aboutit à une structure tensorielle non triviale permettant de reproduire partiellement quelques propriétés turbulentes (asymétrie des densités des gradients longitudinaux et du plan RQ) mais échoue notamment quant au caractère intermittent des fluctuations de vitesse dans la gamme inertielle. Une légère modification de champ, inspirée de la phénoménologie multifractale, permet alors de conserver cette structure non triviale et d'imposer l'intermittence. Nous montrons alors numériquement qu'une telle modification aboutit à un champ de vitesse réaliste de la turbulence, incluant les propriétés d'alignement de la vorticité et le transfert d'énergie inertiel vers les petites échelles. Le processus stochastique obtenu est à notre connaissance la première représentation explicite des théories de Kolmogorov et Obukhov.

L'article est librement consultable sur ArXiv: <http://arxiv.org/abs/0906.5225>

Stochastic Representation of the **Local** Structure of **Turbulence**

Laurent Chevillard¹, Raoul Robert² & Vincent Vargas³
laurent.chevillard@ens-lyon.fr

All articles available at <http://perso.ens-lyon.fr/laurent.chevillard>

Thanks to B. Castaing, Y. Gagne & K. Gawedzki

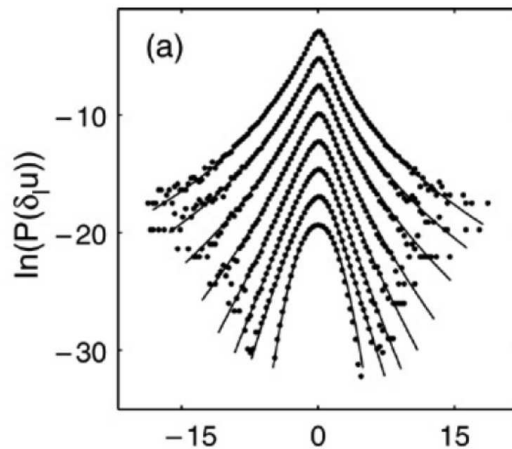
¹Laboratoire de Physique, ENS Lyon, CNRS, France

²Institut Fourier, CNRS, Grenoble, France

³CEREMADE, CNRS, Université Paris-Dauphine, France

Statistical Intermittency and Geometry in turbulence

Experiments + Simulations → Tremendous knowledge of the local structure of turbulence

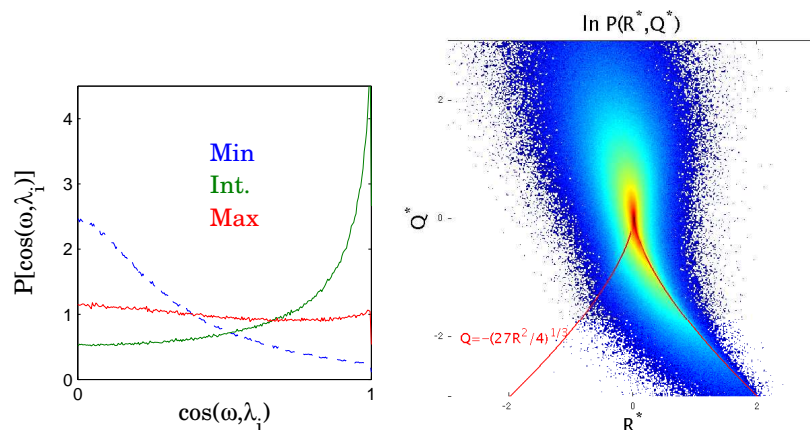


Intermittency

$$\delta_\ell u(x) = u(x + \ell) - u(x)$$

- Non-Gaussianity
- Skewness
- Continuous shape deformation

Castaing, Gagne, Hopfinger (90).



Geometry

- Preferential alignment of vorticity
- Teardrop shape of the RQ-plane

Vieillefosse (84), Ashurst et al. (87), Cantwell (91)

The *Lagrangian* evolution of the *Eulerian* velocity gradient tensor

$$\text{Let } A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \text{ and } \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_q \frac{\partial}{\partial x_q}$$

Then, along a **fluid trajectory** (Léorat 75, Vieillefosse 82, Cantwell 91, Chertkov et al. 99):

$$\nabla(\text{Navier-Stokes}) \Rightarrow \frac{d}{dt} A_{ij} = \underbrace{-A_{iq} A_{qj}}_{\text{self-stretching term}} - \underbrace{\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{Pressure Hessian}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_q \partial x_q}}_{\text{Viscous term}}$$

need to be **modeled**

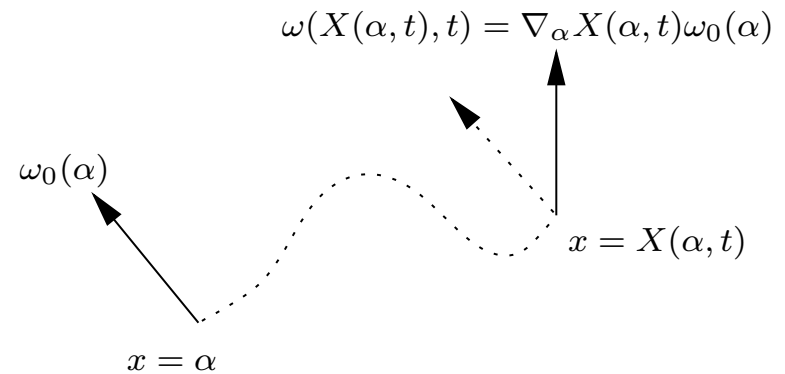
→ **Non-Locality** of pressure (see Ohkitani 94, Chevillard-Meneveau 06)

→ Need for a **vectorial field** description of turbulent flows
(see also Kraichnan and Hunt et al. for Gaussian fields, Rosales and Meneveau 06)

Euler = *Advection* and *Stretching* of Vorticity

Euler equation

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p$$



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}(\alpha, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(\alpha, t)|^3} \wedge}_{\text{Biot-Savart}} \underbrace{\overbrace{\nabla_{\alpha} \mathbf{X}}^{\text{stretching}} \omega_0(\alpha)}^{\text{vorticity at } t}}_{\text{advection}} d\alpha$$

Recent Fluid Deformation closures

During a small time scale $\tau(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{s}_0^2)}}$

- **Stretching** by the local deformation:

$$\boldsymbol{\omega}(\tau) \approx e^{\tau \mathbf{S}_0} \boldsymbol{\omega}_0$$

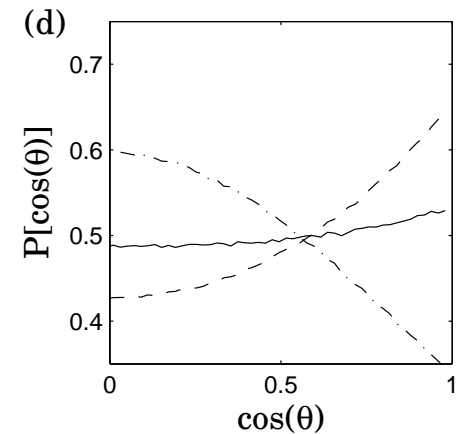
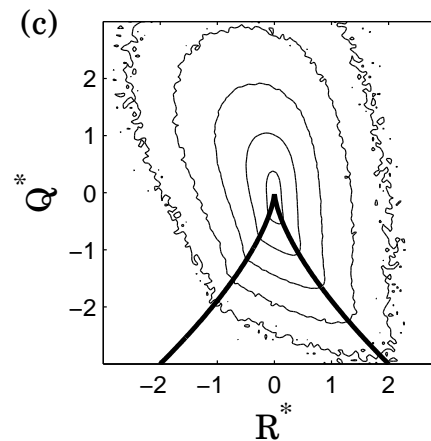
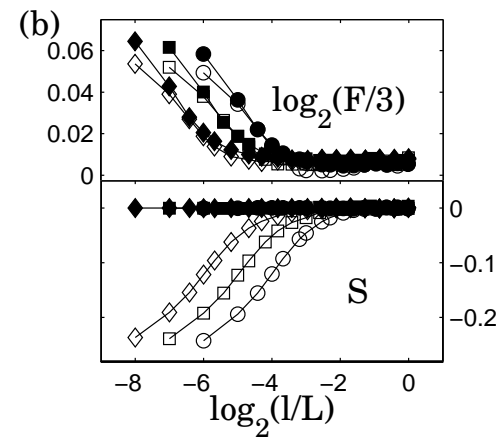
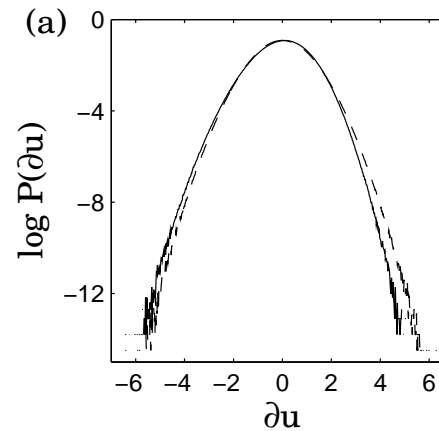
- Neglect of short-time **Advection**, i.e.

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t) \approx \boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}|^\beta} \wedge e^{\tau \mathbf{S}_0(\boldsymbol{\alpha})} d\mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha})$$

- $d\mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha})$: White noise
- $\beta = \frac{13}{6}$ to ensure Kolmogorov scalings

- Skewed longitudinal gradients (but not velocity increments!)
- Weakly non Gaussian (no intermittency)
- Wrong vorticity alignments



Long-range correlations \rightarrow Multifractals

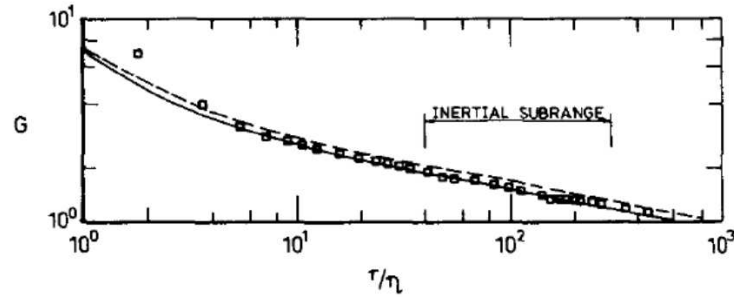
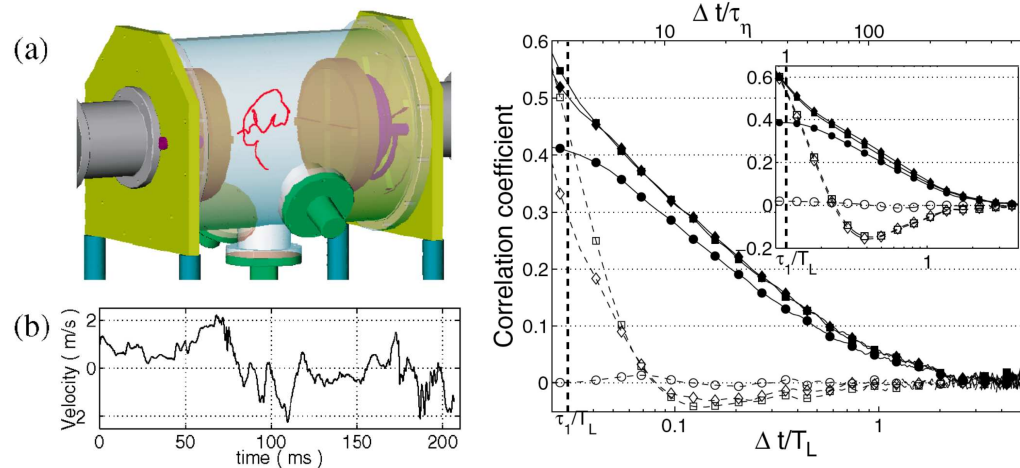


FIG. 1. Autocorrelation of dissipation fluctuations. \square , experiment; —, Eq. (6) with $B=4.92$, $D=6.83$, and $\mu=0.2$; ---, Eq. (4) with $C=6.46$ and $\mu=0.2$.

Monin-Yaglom (75), Gagne *et al.* (78), Antonia *et al.* (80)

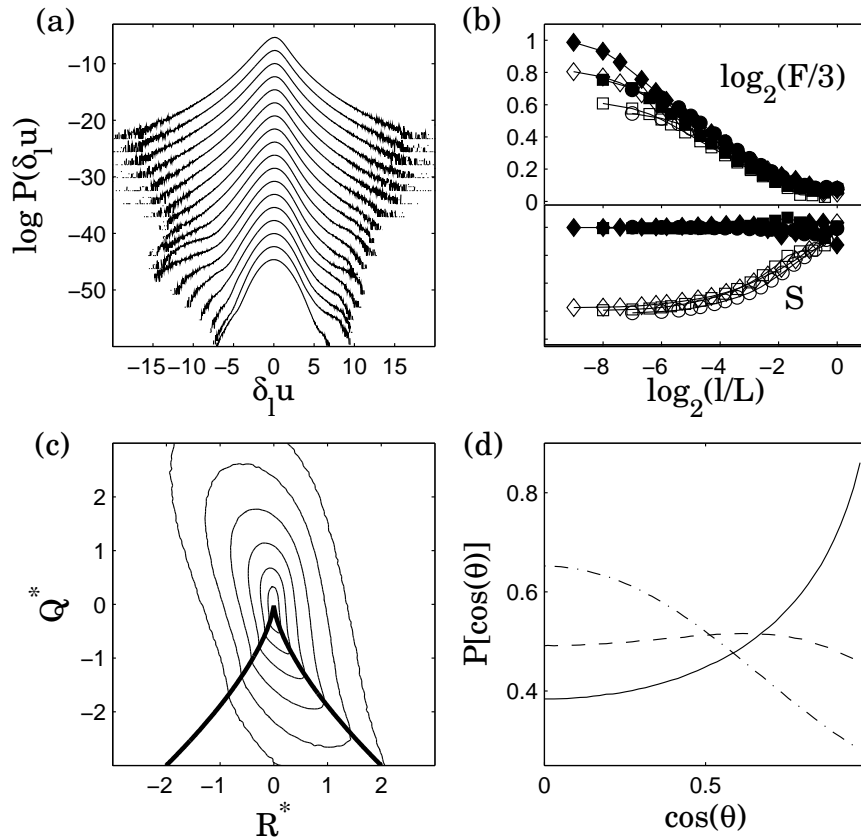


Yeung (97), Mordant *et al.* (02), Mordant *et al.* (04)

A stochastic representation of the local structure of turbulence

Multifractal (long-range correlated) "strain":

$$\tilde{\mathbf{S}} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \lambda \int \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}) \otimes [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}) \wedge d\mathbf{W}(\boldsymbol{\sigma})] + [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}) \wedge d\mathbf{W}(\boldsymbol{\sigma})] \otimes (\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|^{7/2}}$$



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}|^\beta} \wedge e^{\tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\alpha})} d\mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha})$$

- $\lambda^2 = 0.025$: intermittency parameter
 $\langle |\delta_\ell u|^q \rangle \sim \ell^{\zeta_q}$ with
 $\zeta_q = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\lambda^2\right)q - \lambda^2 \frac{q^2}{2}$
- Karman-Howarth-Kolmogorov:
 $\langle (\delta_\ell u)^3 \rangle \sim \ell$
- **Correct vorticity alignments!!**

→ **Realistic** incompressible, intermittent (i.e. multifractal) and skewed (i.e. dissipative) turbulent velocity field.

Conclusion

- **Realistic** incompressible, intermittent (i.e. multifractal) and skewed (i.e. dissipative) turbulent velocity field.
- It reproduces all known properties of turbulence in the **inertial** range.
- One **Single** free parameter: **intermittency** λ^2 coefficient.

Perspectives

- Analytical studies:
 - Rigorous proofs of multifractality (longitudinal \leftrightarrow transverse, renormalization of the multifractal measure)
 - Calculation of $\langle (\delta_\ell u)^3 \rangle$? (which implies the Kolmogorov constant and energy transfer mechanisms)
- More rigorous derivations from Euler/Navier-Stokes equations:
 - Stretching and advection at **long times**
 - Role played by viscosity and dissipative scales ?
- **Selection rules for λ^2 ???**