

# Compte-rendu de la « session numérique »

## SOMMAIRE :

- *Introduction générale à la simulation numérique des écoulements turbulents des écoulements turbulents* (E. Lévêque, Ens-Lyon) :
  - modélisation du phénomène physique (DNS, RANS, LES)
  - représentation numérique / implémentation et codage
  - validation et exploitation : attention aux pièges !
  
- *Utilisation de la simulation des grandes échelles en géométries complexes : aspirateur de centrale hydraulique* (C. Duprat, LEGI) :
  - problématique : écoulement instationnaire à haut Reynolds en géométrie complexe
  - modèle de paroi (pour représenter analytiquement la couche limite sans l'intégrer numériquement) : présentation du modèle et tests
  - le logiciel opensource OpenFoam : présentation, avantages/inconvénients, utilisation
  
- *Simulation numérique directe de turbulence de paroi compressible* (G. Gerolymos, Institut Jean Le Rond D'Alembert, UPMC)
  - problématique
  - schéma d'interpolation spatiale d'ordre élevé (de type WENO) : présentation et tests
  - projet OpenSource : <http://www.aerodynamics.fr>
  
- *Direct Numerical Simulation of finite-size particles in turbulence* (H. Homann, Bochum, Allemagne)
  - méthode de *pseudo-penalization* (Pasquetti, 2008) : considérer la particule comme une zone impénétrable pour le fluide
  
- *Simulation des grandes échelles couplée à une modélisation stochastique de l'accélération de sous-maille pour un écoulement de canal à grand nombre de Reynolds* (E. Zamansky, LMFA)
  - modélisation de la composante de l'accélération liée à l'agitation turbulente sous-maille : amplitude et orientation
  - résultats numériques

# SIMULATION NUMÉRIQUE DES ECOULEMENTS TURBULENTS

*contexte général — seulement*

E. Lévêque

Laboratoire de Physique de l'École normale supérieure de Lyon.

[emmanuel.leveque@ens-lyon.fr](mailto:emmanuel.leveque@ens-lyon.fr)

# les étapes

1. Qu'est ce que l'on veut décrire/capturer numériquement ?  
→ **modélisation du phénomène physique**, qui doit conduire aux équations à intégrer  
~ *physique*
2. **représentation numérique** de la solution de ces équations ?  
→ méthodes de discrétisation ; dimensionnement et maillage  
~ *analyse numérique*
3. **implémentation et codage**  
~ *informatique*
4. exécution, **validation et exploitation des résultats**  
~ *physique*

## Remarques :

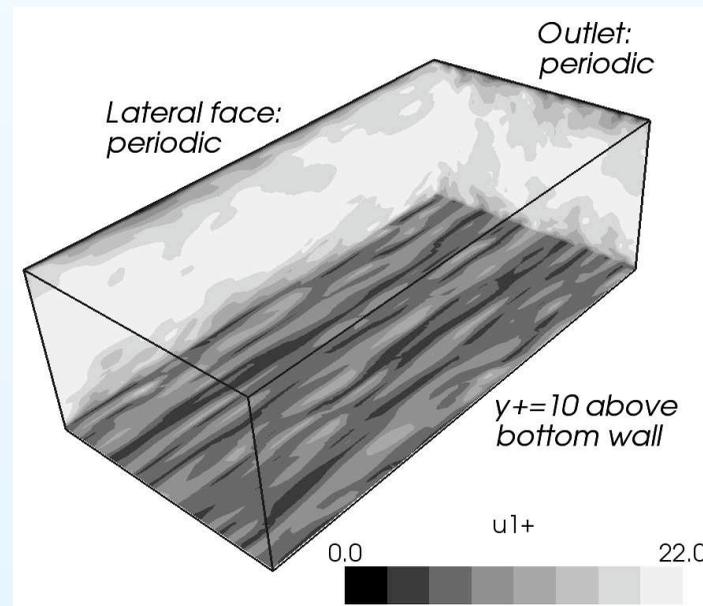
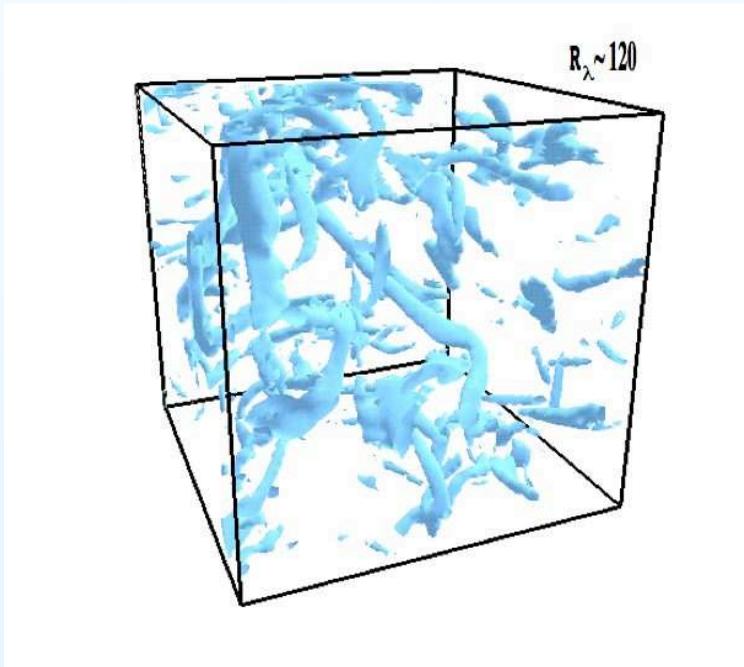
- (1), (2), (3) et (4) ne sont pas indépendantes !
- (2) et (3) sont souvent regroupés dans une *boîte noire* (solveur/logiciel)

# Modélisation (les grands classiques)

- (a) simulation numérique directe (**D**irect **N**umerical **S**imulation)
- (b) Reynolds-Averaged Navier-Stokes (**RANS** simulation)
- (c) simulation des grandes échelles (**L**arge-**E**ddy **S**imulation)

**(a) simulation numérique directe (DNS)** : décrire la dynamique spatio-temporelle du fluide dans son détail

- intégration des équations de la mécanique des fluides 😊
- études théoriques ; simulations numériques de référence
- coût en calcul exorbitant 😞
- limité à des écoulements simples (ou simplifiés) : e.g. turbulence homogène et isotrope, canal plan (bi-périodique)



# Modélisation (description simplifiée de l'écoulement)

(b) **Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)** : décrire l'écoulement moyen (uniquement)

$U = \bar{U} + U'$  : décomposition de Reynolds

$$\partial_t U = \text{NS}(U)$$

$\partial_t \bar{U} = \overline{\text{NS}(U)} = \text{NS}(\bar{U}) + \text{div}(-\overline{U'_i U'_j})$  avec  $-\rho \overline{U'_i U'_j}$  : tenseur des contraintes de Reynolds

• le concept de **viscosité turbulente** (Boussinesq... ) :

$$-\rho \overline{U'_i U'_j} + \frac{1}{3} \rho \overline{U'_k{}^2} \delta_{ij} = 2\rho \nu_t \overline{S_{ij}}$$

$\nu_t$  est une propriété de l'écoulement et pas du fluide !

$[\nu_t] \sim [L] \times [U]$  :

• *longueur de mélange* :  $\nu_t \sim \ell_m \times \left( \ell_m \cdot \left| \frac{d\bar{U}_x}{dy} \right| \right)$  avec  $\ell_m$  longueur de mélange (Prandtl)

• *équation de transport pour l'énergie turbulente* :  $\nu_t \sim \ell_m \cdot \overline{k'}^{1/2}$  avec  $\partial_t \overline{k'} = \dots$

• *modèle*  $(k, \varepsilon)$  :  $\nu_t \sim \frac{\overline{k'}^2}{\bar{\varepsilon}}$  avec  $\partial_t \overline{k'} = \dots$  et  $\partial_t \bar{\varepsilon} = \dots$

→ imbattable en temps de calcul 😊

→ empirique ("savoir-faire" important) ; peu d'information sur l'écoulement 😞

# Modélisation (description simplifiée de l'écoulement)

(b) **simulation des grandes échelles (LES)** : décrire la dynamique des grandes échelles (les plus énergétiques)

$$U = \tilde{U} + U' \text{ avec } \tilde{U} \approx U_{\text{grid}}$$

$$\partial_t \tilde{U} = \widetilde{\text{NS}(U)} = \text{NS}(\tilde{U}) + \text{div}(\tilde{U}_i \tilde{U}_j - \overline{U_i U_j})$$

$\rho(\tilde{U}_i \tilde{U}_j - \overline{U_i U_j})$  : tenseur des contraintes sous-maille

- le concept de **viscosité sous-maille** :

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = 2\rho \nu_{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij}$$

$\nu_{\text{sgs}}$  est une propriété de l'écoulement et pas du fluide ! ☹

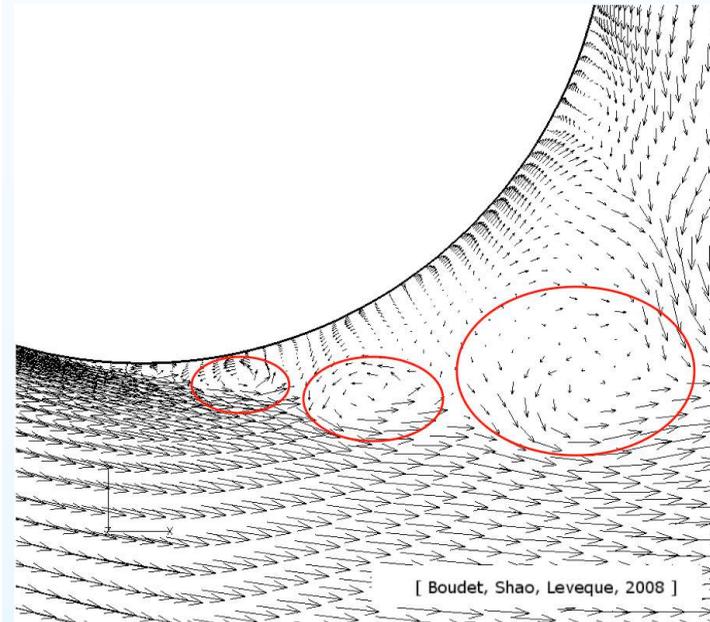
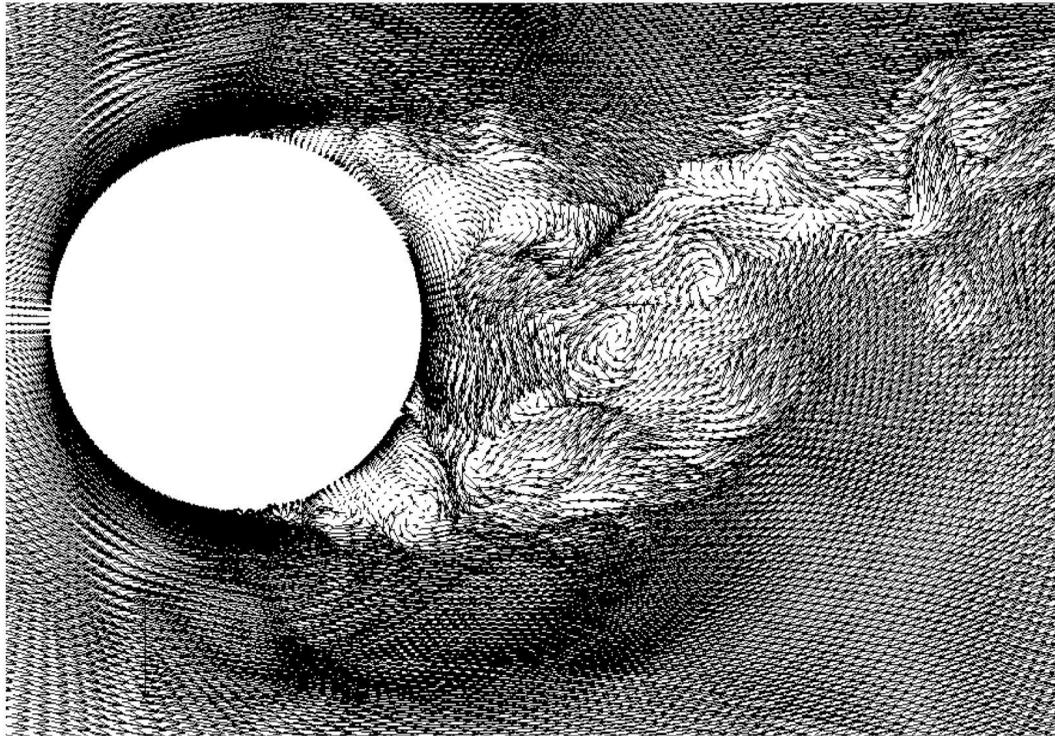
- Smagorinsky  $\sim$  longueur de mélange :  $\nu_{\text{sgs}} = (C_s \Delta)^2 \cdot |\tilde{S}|$  avec  $\Delta$  résolution du maillage
- Smagorinsky dynamique : ajustement dynamique de  $C_s$
- Shear-Improved Smagorinsky :  $\nu_{\text{sgs}} = (C_s \Delta)^2 \cdot (|\tilde{S}| - |\overline{S}|)$

→ information pertinente sur la dynamique de l'écoulement ☺

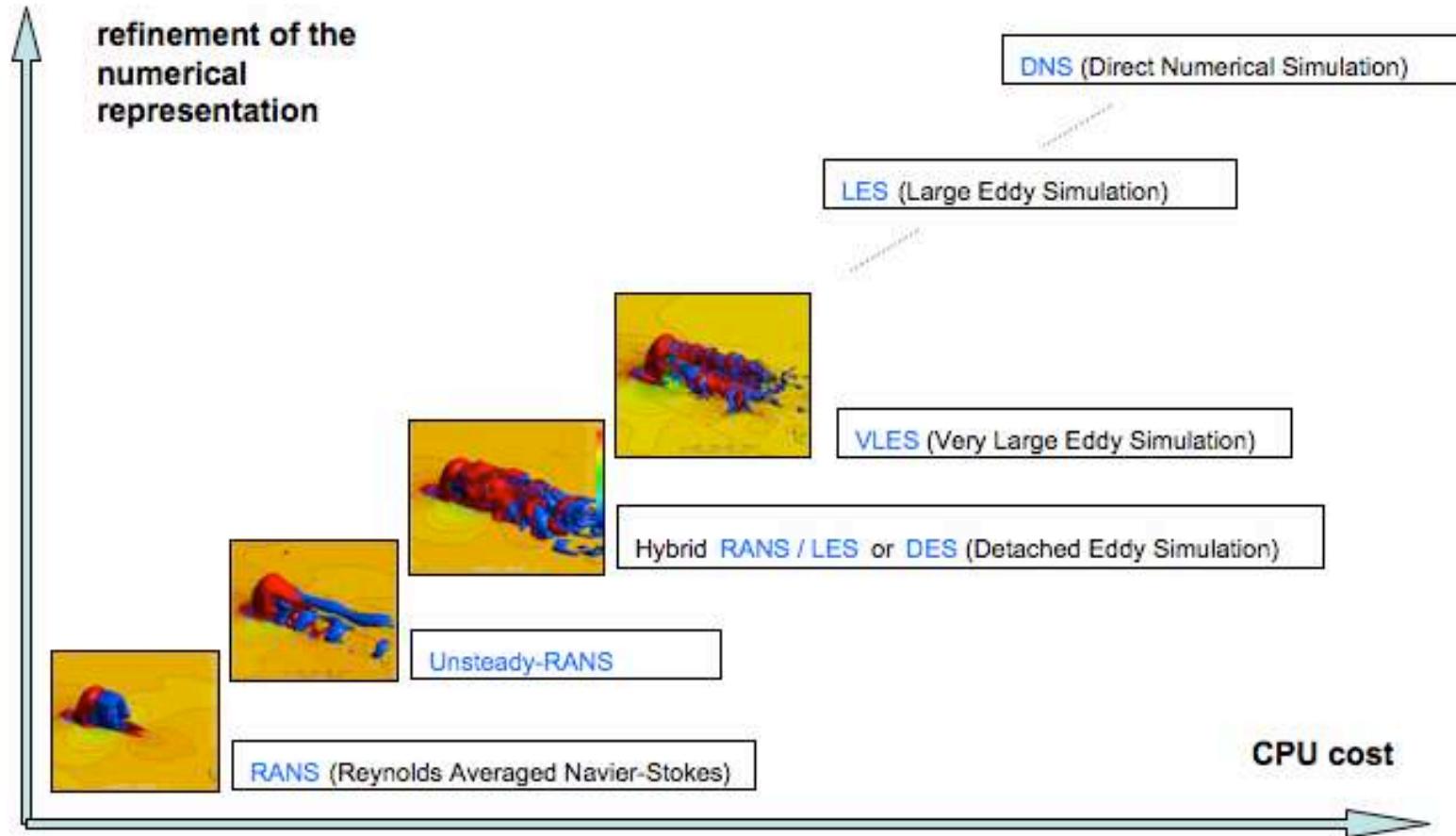
→ modélisation difficile pour les écoulements complexes (inhomogène et instationnaire) ☹

# Remarque sur la Simulation des Grandes Échelles

... permet une résolution adaptée à la complexité de l'écoulement :

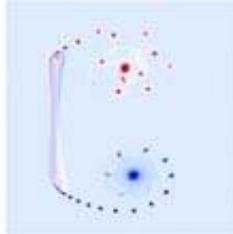


# Modélisation – vue d'ensemble

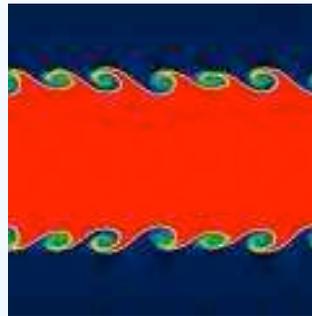


# Modélisation – quelques méthodes alternatives

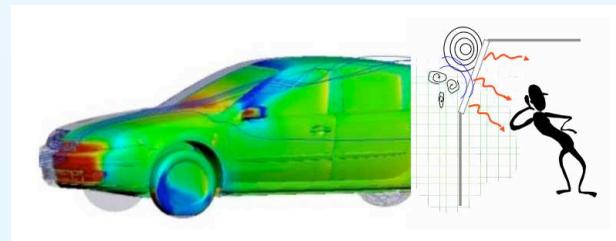
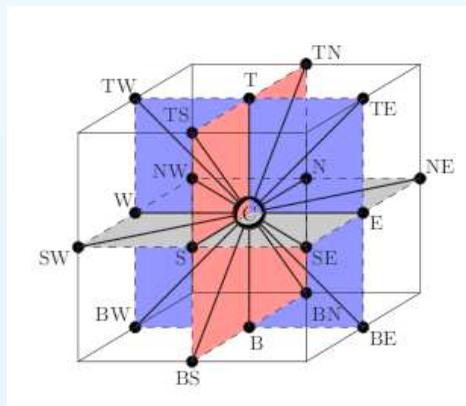
- *méthode Vortex* (simulation sans maillage)



- *Smoothed Particles Hydrodynamics*



- *méthode Boltzmann sur réseau*



# Résolution numérique des équations

- i. *discrétisation spatiale* : différences finies ; éléments finis (locaux ou non-locaux) ; volumes finis
- ii. *discrétisation temporelle*
- iii. *résolution d'un système d'équations algébriques*

dans la pratique, on utilise des ***bibliothèques scientifiques dédiées*** :

- FFTW (transformée de Fourier, méthodes spectrales)
- Clawpack (volumes finis)
- MUMPS ; Petsc (résolution système d'équations algébriques)
- ...

des ***environnements de développement***

- FreeFem++ (éléments finis)
- ...

ou des ***solveurs*** (tout en un)

- OpenFoam (mécanique des fluides)
- ...



*Promouvoir les Logiciels Utiles Maîtrisés et Economiques dans l'Enseignement Supérieur et la Recherche*



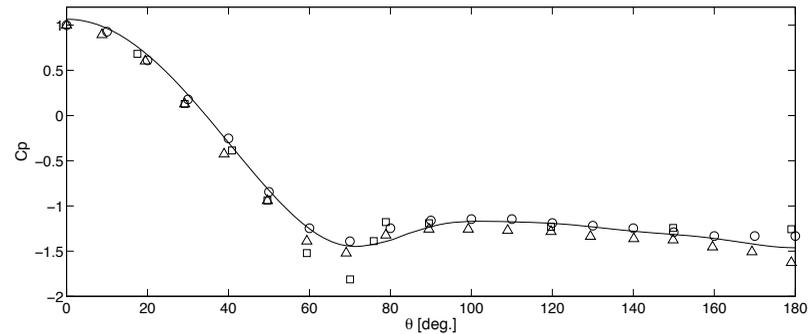
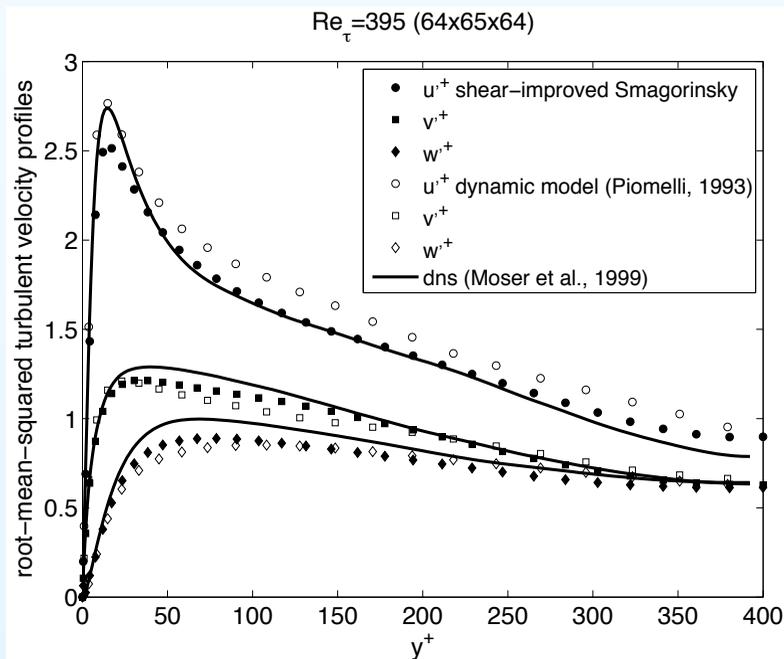
# Validation des résultats

du point de vue "analyse numérique" :

- *consistance*
- *stabilité*
- *convergence*

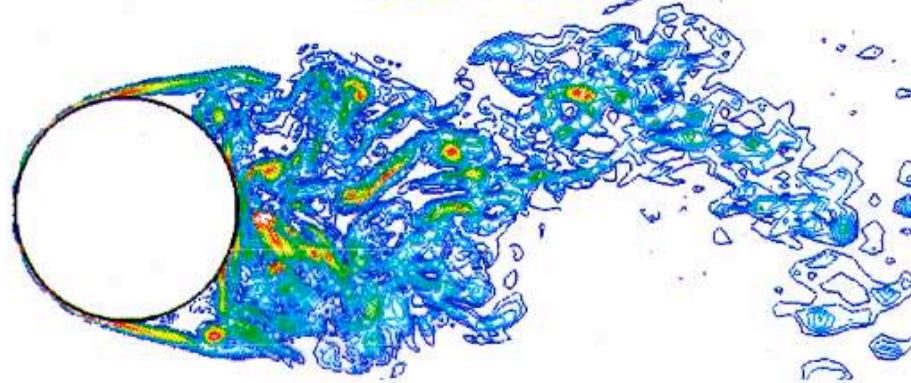
du point de vue "modélisation physique" :

- comparaison avec d'autres méthodes numériques (sur des cas tests simples)  
e.g. LES versus DNS
- comparaison avec données expérimentales (si possible)



# Quiz: Which turbulent simulation is correct?

1.



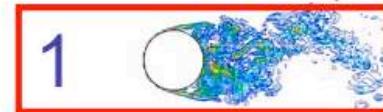
2.



Cylinder,  $Re = 3900$ , Contours of instantaneous vorticity magnitude

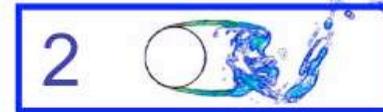
## Quiz: continued...

Comparison of mean streamwise velocity to experiments:



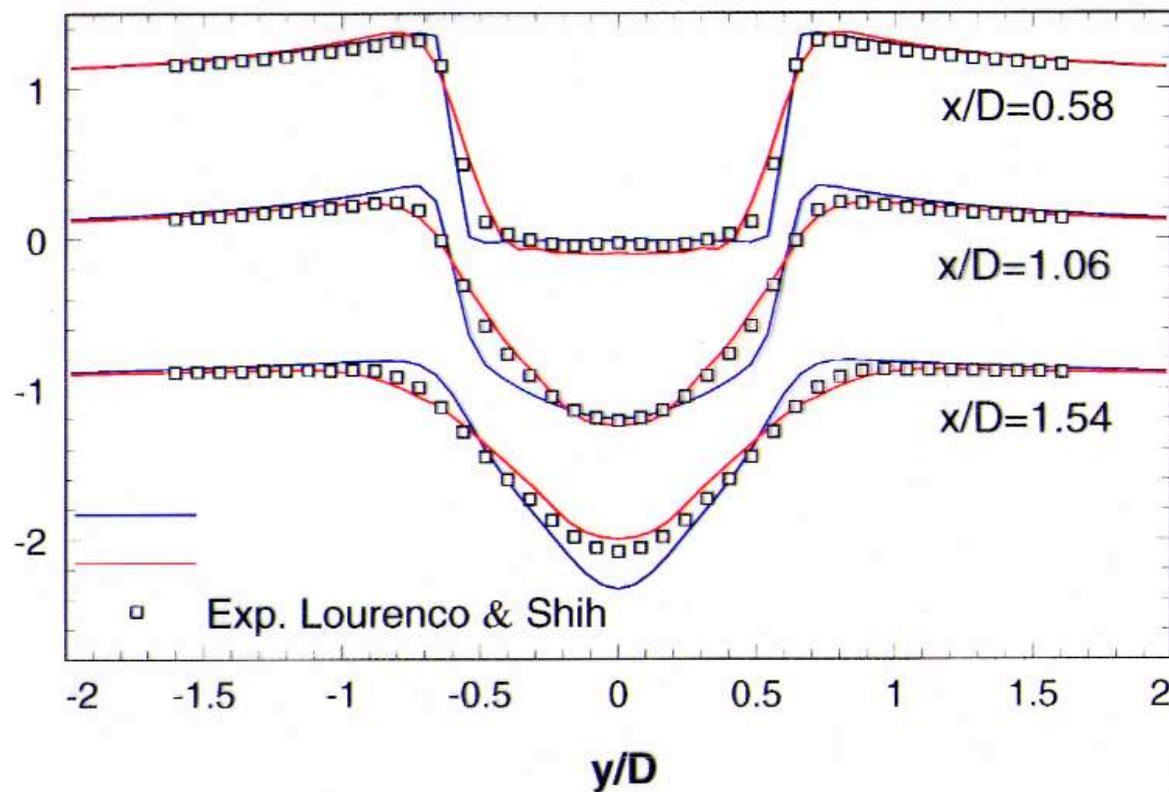
1

$N_z=4$



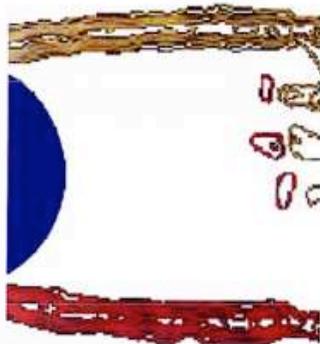
2

$N_z=48$

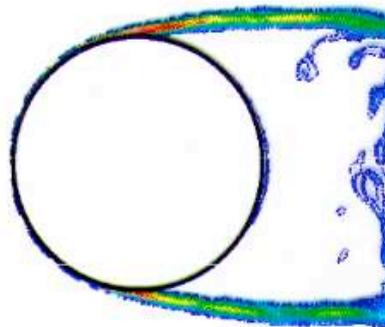


## Answer: number 2 !

- Early transition was occurring in both experiment (vibration) and the very coarse simulation.
- Other experiments confirm the finer simulations.



PIV Experiment of  
Chyu and Rockwell  
(1996)



Numerical simulations with  
 $N_z = 48$

# Utilisation de la Simulation des grandes échelles en géométries complexes

## Application de la SGE à un aspirateur de centrale hydraulique

Cédric Duprat<sup>1</sup>   Guillaume Balarac<sup>1</sup>   Olivier Métais<sup>1</sup>

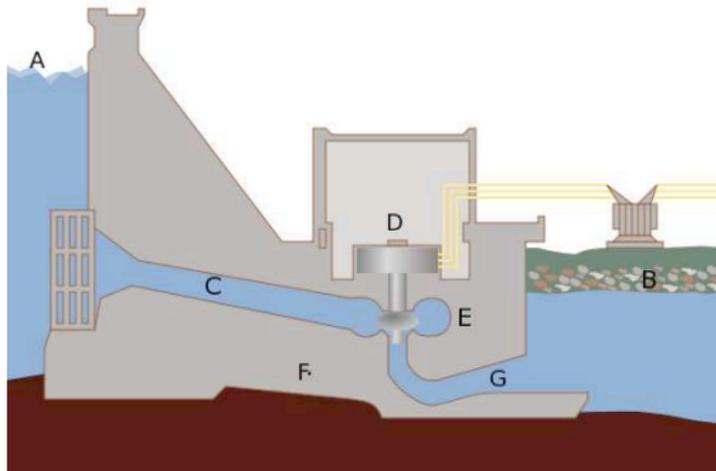
<sup>1</sup>Grenoble-INP, LEGI  
équipe MoST (Modélisation et Simulation de la Turbulence)  
Cedric.duprat@legi.grenoble-inp.fr

GDR Turbulence, 2009  
Aussois

## Plan de la présentation

- 1 Introduction**
  - Contexte industriel
  - Problématiques
- 2 Utilisation d'un modèle de paroi**
  - Présentation du modèle
  - Tests a priori
  - Tests a posteriori
- 3 Utilisation du code libre OpenFOAM**
  - Présentation du code OpenFOAM
  - Résultats sur l'aspirateur
- 4 En guise de conclusion**

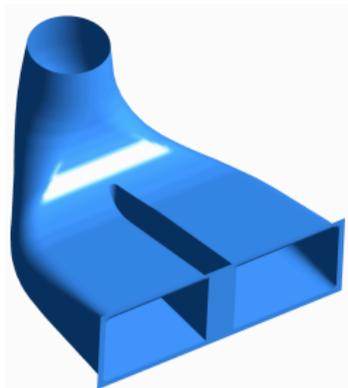
# Principe de fonctionnement d'une centrale hydraulique



- A Bassin amont
- B Bassin aval
- C Conduite forcée
- D Alternateur

- E bête + turbine
- F Barrage
- G Aspirateur

## Problématique : Simulation instationnaire à haut $Re$ en géométrie complexe



- simulation instationnaire  
⇒ condition d'entrée reproduisant ces instationnarités de façon réaliste
- À haut Reynolds et en géométrie complexe  
⇒ Utilisation de techniques SGE avec des modèles de paroi pour éviter des maillages trop coûteux.

- Non « standard » dans les codes CFD
- Nécessite des développements spécifiques

## La théorie

Plutôt que de calculer la couche limite, on va chercher à la modéliser par un traitement à la paroi

### « Lois de paroi » existantes

- Couche limite en équilibre (« loi log ») Spalding law  
*Néglige le gradient de pression*
- Travail récent de Manhart *et al.* (2008)  
*Prise en compte du gradient de pression **mais** valable uniquement en zone visqueuse*

Développement d'un modèle de paroi valable dans une large région et tenant compte du gradient de pression

## Développement d'une nouvelle « loi de paroi »

### Navier-Stokes simplifiée en paroi (TBLE)

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu_t + \nu) \frac{\partial U_i}{\partial y} \right]$$

### Paramètres adimensionnels Manhart *et al.* (2008)

$$y^* = \frac{y u_{\tau p}}{\nu} \quad U^* = \frac{U}{u_{\tau p}} \quad u_{\tau p} = \sqrt{u_{\tau}^2 + u_p^2} \quad u_p = \left| \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial x} \right|^{1/3}$$

### Modèle de viscosité turbulente

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \kappa y^* \left[ \alpha + y^* (1 - \alpha)^{3/2} \right]^\beta \left( 1 - e^{-\frac{y^*}{1 + A\alpha^3}} \right)^2 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{u_{\tau}^2}{u_{\tau p}^2}$$

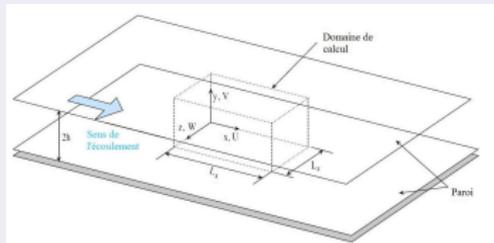
### Description analytique simplifiée pour la vitesse

$$\frac{\partial U^*}{\partial y^*} = \frac{\text{sign}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(1 - \alpha)^{3/2} y^* + \text{sign}(\tau_w) \alpha}{1 + \frac{\nu_t}{\nu}}$$

Tests a priori

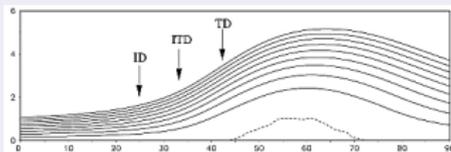
## Géométries utilisées pour la validation *a priori*

### Géométrie sans gradient de pression Moser *et al.* (1989)

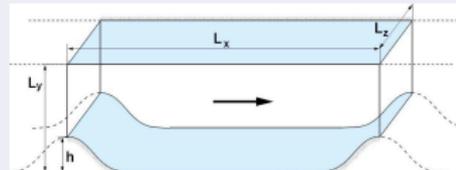


### Géométries avec gradient de pression Manhart *et al.* (2008)

**BL**

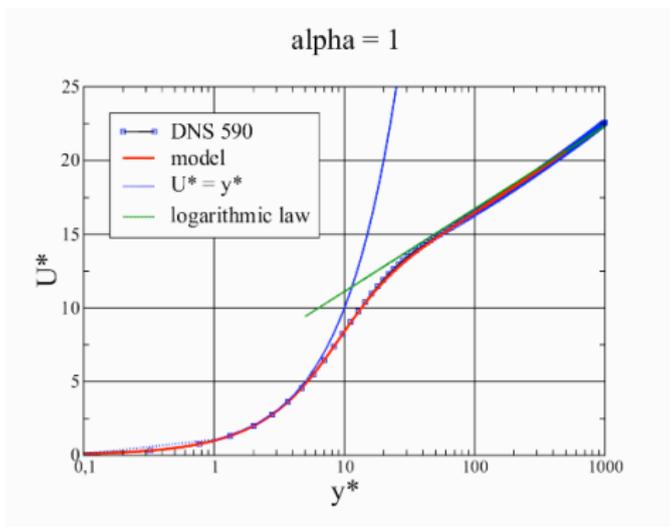


**PH**



Tests a priori

# Gradient de pression négligeable (canal plan) $\alpha = 1$

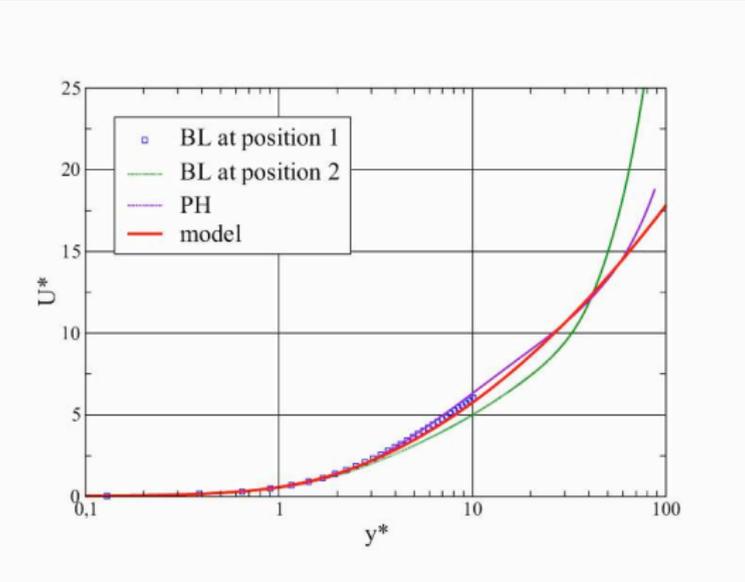


- loi logarithmique retrouvée
- zone tampon bien estimée

Tests a priori

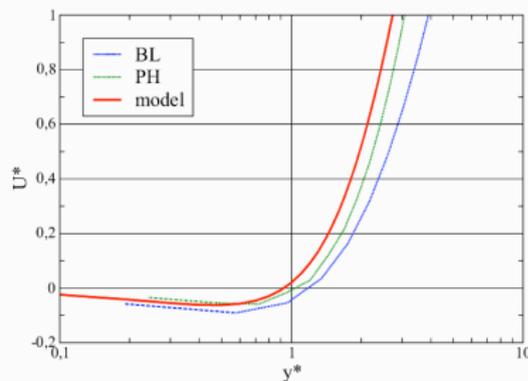
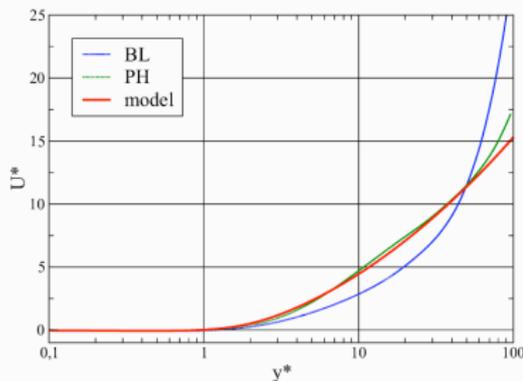
# Gradient de pression et frottement comparables $\alpha = 0.4$

## Gradient de pression favorable



# Gradient de pression et frottement comparables $\alpha = 0.4$

## Gradient de pression adverse

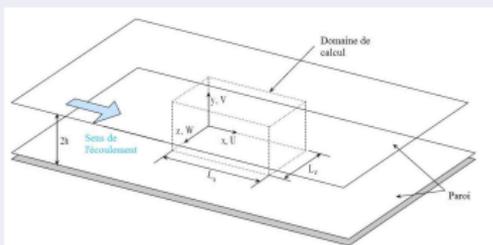


- recirculation retrouvée en aval d'un point de décollement

Tests a posteriori

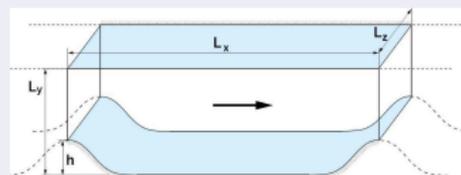
## Calculs de références utilisés pour la validation *a posteriori*

### SDN de Abe *et al.* (2004)



- $Re_h = 41400$
- $2048 * 448 * 1536$

### SGE de Temmerman *et al.* (2003) TL et Breuer *et al.* (2007) BM



- $Re_h = 10595$
- **TL**  $196 * 128 * 186$
- **BM**  $281 * 220 * 200$

## Modèles testés *a posteriori*

### Loi de paroi comparées

- sans loi de paroi
- Spalding

$$y^+ = U^+ + \frac{1}{E} \left[ e^{-\kappa U^+} - \left( 1 + (\kappa U^+) + \frac{(\kappa U^+)^2}{2} + \frac{(\kappa U^+)^3}{6} \right) \right]$$

- Manhart *et al.*

$$U^* (y^*) = \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{(1-\alpha)^{3/2}}{2} y^{*2} + \text{sign}(\tau_w) \alpha y^*$$

- loi Maison

$$\frac{\partial U^*}{\partial y^*} = \frac{\text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) (1-\alpha)^{3/2} y^* + \text{sign}(\tau_w) \alpha}{1 + \frac{\nu_t}{\nu}}$$

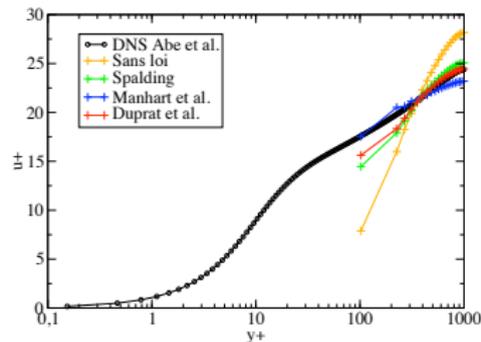
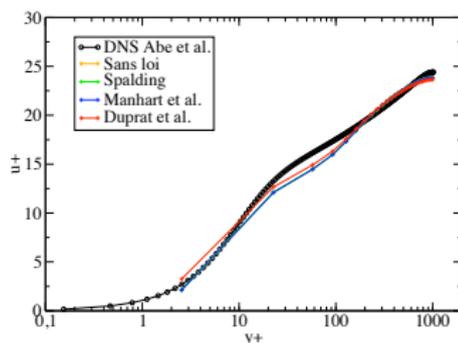
- SGE ou SND (Références)

Tests a posteriori

# Résultats sans gradient de pression (canal plan)

## Calculs effectués

Calcul	Maillage	$y^+$
DNS réf.	2048 * 448 * 1536	0.15
LES 1	50 * 82 * 38	2.5
LES 2	50 * 42 * 38	100

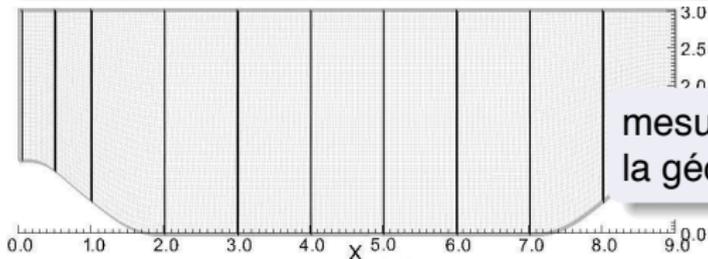
Champ de vitesse moyen  $y^+ = 5$ 

Tests a posteriori

# Résultats avec gradient de pression (colline périodique)

## Calculs effectués

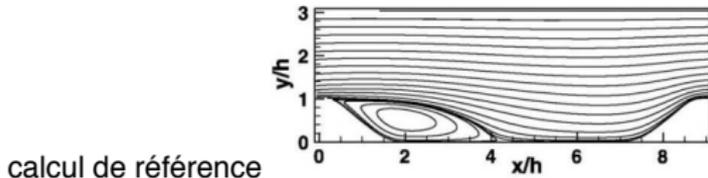
Calcul	Maillage	$y^+$
LES réf. <b>BM</b>	196 * 220 * 200	1
LES réf. <b>TL</b>	196 * 128 * 186	1
LES 1	112 * 33 * 92	10
LES 2	112 * 33 * 92	100



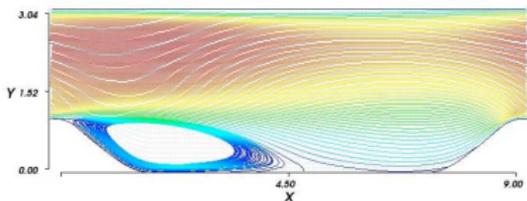
mesures disponibles le long de la géométrie

Tests a posteriori

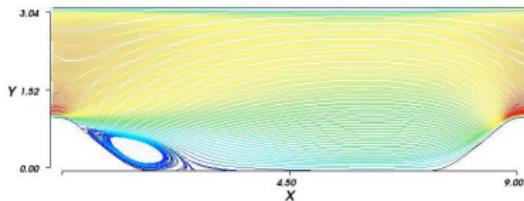
# Calculs de la colline périodique $y^+ = 10$ - ligne de courant



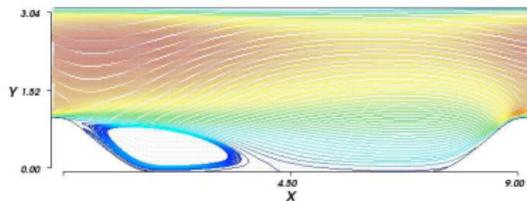
sans loi de paroi



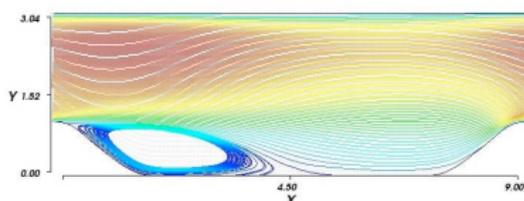
loi de Spalding



loi de Manhart *et al.*



modèle proposé



Tests a posteriori

Calculs de la colline périodique  $y^+ = 10$  - comparatifs

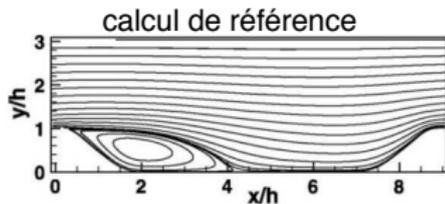
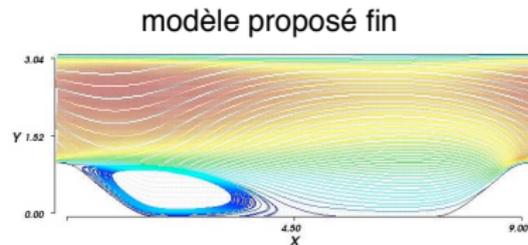
Nom	décollement $x/h$	recollement $x/h$
référence <b>TL</b>	<b>0.19</b>	4.694
référence <b>BM</b>	<b>0.22</b>	4.72
Sans loi	0.307	5.049
Spalding	0.563	2.681
Manhart <i>et al.</i>	0.393	4.327
Duprat <i>et al.</i>	<b>0.387</b>	4.639

Remarque:

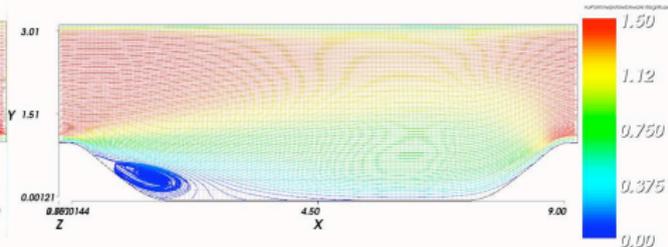
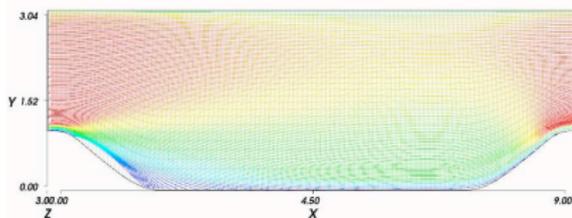
Différence (Duprat / **BM**) sur le point de décollement = 2 mailles (seulement !)

Tests a posteriori

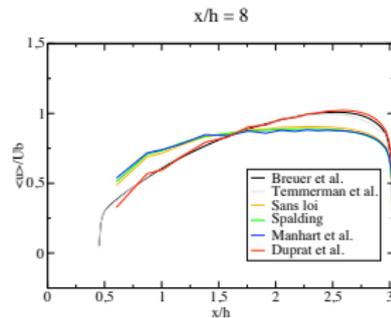
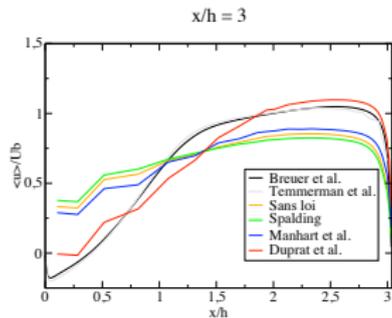
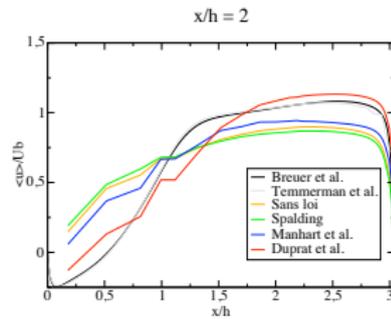
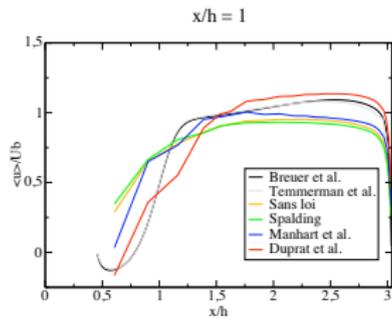
# Calculs de la colline périodique $y^+ = 100$ - ligne de courant

loi de Manhart *et al.*

modèle proposé



Tests a posteriori

Calculs de la colline périodique  $y^+ = 100$  - Profils de vitesse

Tests a posteriori

Calculs de la colline périodique  $y^+ = 100$  - comparatifs

Nom	décollement $x/h$	recollement $x/h$
référence <b>TL</b>	<b>0.19</b>	4.694
référence <b>BM</b>	<b>0.22</b>	4.72
Sans loi	-	-
Spalding	-	-
Manhart <i>et al.</i>	-	-
Duprat <i>et al.</i>	<b>0.753</b>	3.085

Remarque:Différence (Duprat / **BM**) sur le point de décollement = 6 mailles

## Les avantages évidents

### Code libre et ouvert

- 100 Mo de sources disponibles ouverte
- sources mises à jour régulièrement (V1.6 depuis juillet 2009)
- tutoriaux, user et programmer -guide, ect...

### Communauté active

- forum internet **très** actif (sur CFDonline),
- wiki, base de données,
- workshop OpenFOAM (5ème en 2010 en Suède),
- conférences (ECCOMAS 2010),
- support de cours,
- code académique et industriel.

# Introduction sur OpenFAOM

## Programmation orienté objet

- adapté au milieu continu (équations différentielles)
- exemple de l'équation de transport de l'énergie cinétique:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} k) - \nabla \cdot [(\nu + \nu_t) \nabla k] = \nu_t \left[ \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right]^2 - \frac{\epsilon_0}{k_0} k \quad (1)$$

- est implémenté de la façon suivante:

```

solve
(
  fvm::ddt(k)
+ fvm::div(phi, k)
- fvm::laplacian(nu() + nut, k)
== nut*magSqr(symm(fvc::grad(U)))
- fvm::Sp(epsilon/k, k)
)

```

## Gestion du maillage

### Outil de conversion

- pas de mailleur intégré
- il existe de nombreux outils de conversion depuis:
  - STAR-CD,
  - Fluent,
  - Ansys,
  - IGES, ...

mon cas *ICEM CFD*  $\Rightarrow$  Fluent  $\Rightarrow$  OpenFAOM

### Génération automatique de maillage

- utilisé pour des maillage adaptatif, FSI, ...

## Possibilités du code

### Solver disponible (+ tutoriaux)

- écoulement diphasique et multiphasique (méthode VOF)
- interactions fluide/structure
- transport de particule (couplage Eulerien/Lagrangien)
- turbomachine (maillage tournant)
- méthode de Monte-Carlo (écoulement gaz rare)

### Fabrication de solveur maison

- thermique en LES (écoulement de Couette)
- RANS/LES (en prévision)

## Les inconvénients

### Compilations

- compilateur GNU version spécifique
- construction du code non-standard (ex: `wmake` redéfinit)
- solver, pré- et post-processing liés

### Post-traitement

- ParaView 3.6.1
- Mais, ...

## Méthodes numériques utilisées dans le cadre de ma thèse

### Utilisation du logiciel libre OpenFOAM

- Utilise la méthode des Volumes Finis
- Méthode numérique centré d'ordre 2 (temps & espace)
- Couplage pression/vitesse : PISO

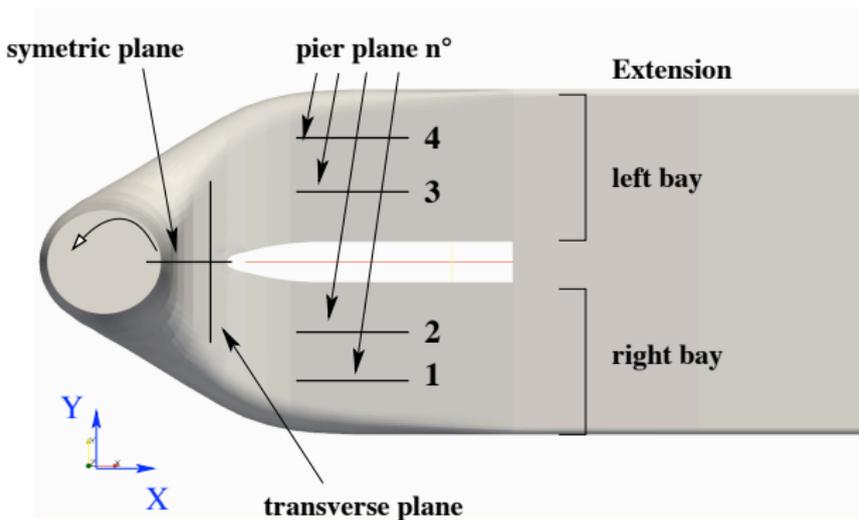
### Modèle sous-maille SGE

- Modèle à une équation de transport pour l'énergie cinétique sous-maille (Yoshizawa (1986))
- Smagorinsky (stat., dyn.), DES (et DDES), ...

## Résultats obtenus sur l'aspirateur

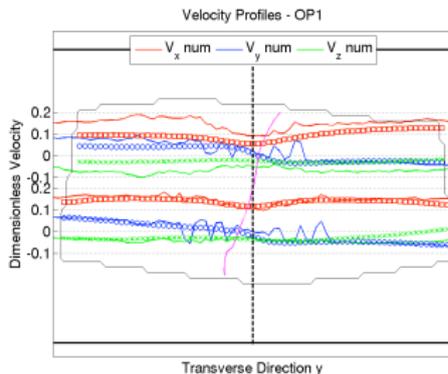
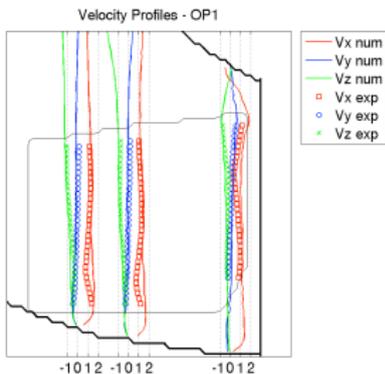
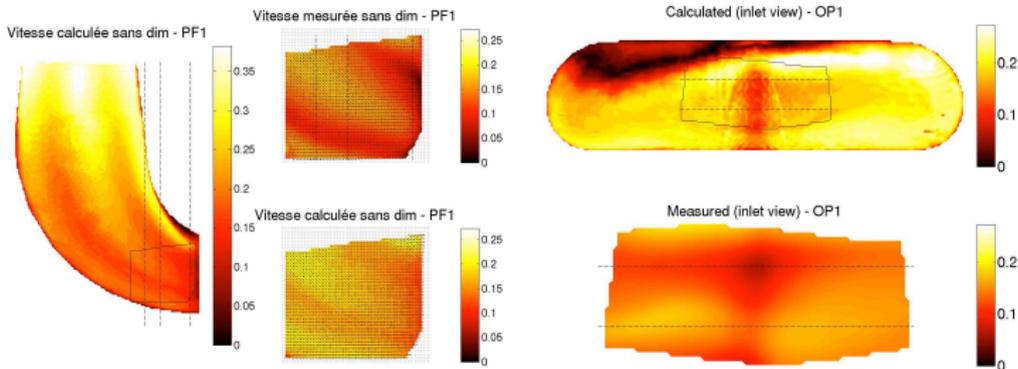
### Géométrie de calcul

- maillage  $2 \cdot 10^6$  pour un nombre de Reynolds de  $Re \approx 10^6$
- condition d'entrée à partir de mesures expérimentales
- validation basée sur des mesures PIV-2D3C



Résultats sur l'aspirateur

## Résultats obtenus sur l'aspirateur

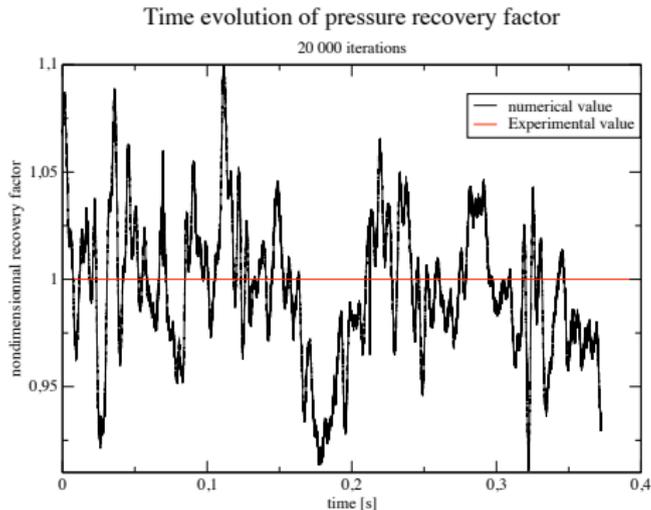


Résultats sur l'aspirateur

# Résultats obtenus sur l'aspirateur

## Paramètre global caractérisant l'aspirateur

coefficient de récupération:  $\chi = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U_b^2}$



## En guise de conclusion sur notre utilisation d'OpenFOAM

### Utilisation générale

- code efficace en LES pour des géométries complexes
- intéresse les industriels (collaborations, ...)
- utilisable comme outil pour un cours de CFD

### Utilisation dans le cadre de ma thèse

- implémentation de conditions limites (loi de paroi, condition d'entrée)
- implémentation de solveurs couplés et modèles de turbulence

### Principaux inconvénients

- **développement** de modèle de turbulence,
- réalisation de calculs massivement parallèles.

**Des questions ?**



# **DNS of Compressible Wall-Turbulence**

**G.A. Gerolymos, D. Sénéchal, I. Vallet**

*University of Paris (UPMC)*

*Aussois, dec 7–10, 2009  
CNRS GDR Turbulence*



## Contents

- **motivation**
  - **compressible aerodynamics CFD and CAA**
  - **compressible DNS database**
  - **modelling for VLES**
- **DNS and Very-High-Order Schemes**
  - **Very-High-Order WENO Schemes**
  - **WENO schemes for compressible DNS**
  - **compressible turbulence**
    - $p', \rho', T', s'$
- **aerodynamics: an open source project**



## WENO Background: Upwind Scalar Reconstruction

$$f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} h(\xi) d\xi \implies f'(x) = \frac{h(x + \frac{1}{2}\Delta x) - h(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

$$h(x) \cong := \sum_{m=0}^M c_{h_{m,i+\frac{1}{2}}} (x - x_i)^m$$

$$f(x) \cong := \sum_{m=0}^M c_{f_{m,i+\frac{1}{2}}} (x - x_i)^m$$

X.D. LIU, S. OSHER, T. CHAN: *J. Comp. Phys.* **115** (1994) 200–212

G.S. JIANG, C.W. SHU: *J. Comp. Phys.* **126** (1996) 202–228

G.A. GEROLYMOS, D. SÉNÉCHAL, I. VALLET: *J. Comp. Phys.* **228** (2009) 8481–8524

G.A. GEROLYMOS: *SIAM J. Num. Anal.* (2010) submitted



## WENO Background: Upwind Scalar Reconstruction

### UW(2r - 1) Linear Reconstruction

$$S_{i,(r-1),(r-1)} := [i - (r - 1), \dots, i + (r - 1)] \quad ; \quad M = 2r - 2$$

$$f_{r,i+\frac{1}{2}}^{(L,UW)} = \sum_{\ell=-(r-1)}^{(r-1)} a_{r,\ell}^{(UW)} f_{i+\ell}$$

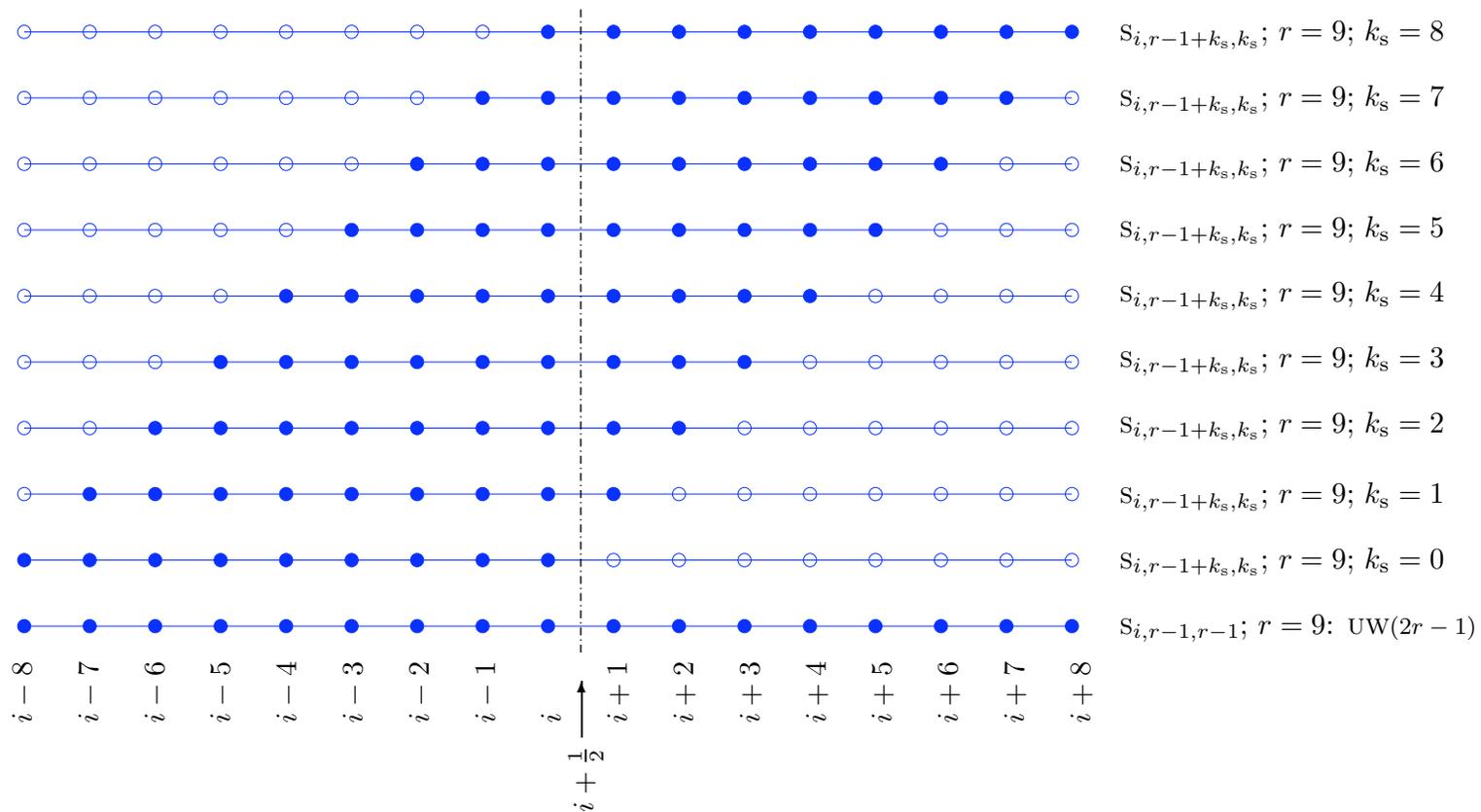
### WENO(2r - 1) Nonlinear Reconstruction

$$S_{i+k_S,r-1,0} \equiv S_{i,r-1-k_S,k_S} = [i+k_S-(r-1), \dots, i+k_S] \quad ; \quad k_S = 0, \dots, (r-1)$$

$$f_{r,i+\frac{1}{2}}^{(L,WENO)} = \sum_{k_S=0}^{(r-1)} \omega_{r,k_S,i+\frac{1}{2}} f_{r,k_S,i+\frac{1}{2}}^{(L)}$$



# WENO17





## 1-D Euler Equations: Local Characteristic Reconstruction

$$\underline{w}_{i+\ell}^{i+\frac{1}{2}} := \underline{\underline{L}}(\underline{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\text{AVG}}) \underline{u}_{i+\ell}^{i+\frac{1}{2}} \quad ; \quad \ell \in \mathbf{S}_{i,r-1,r-1} := [i - (r - 1), \dots, i + (r - 1)]$$

$$\underline{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\text{AVG}} = \underline{u}_{\text{RS}}^{\text{GDNV}}(\underline{u}_i, \underline{u}_{i+1})$$

$$\underline{u}_{i+\frac{1}{2}}^{(\text{L,WENOM}_c)} = \underline{\underline{R}}(\underline{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\text{AVG}}) \underline{w}_{i+\frac{1}{2}}^{(\text{L,WENOM})}(\underline{w}_{i-(r-1)}^{i+\frac{1}{2}}, \dots, \underline{w}_{i+(r-1)}^{i+\frac{1}{2}})$$

- **LCR may fail to give ENO results because of interactions between characteristic fields and/or absence of zone of smoothness of  $r$  points**
  - **solution of polynomial Riemann problem**
  - **recursive-order-reduction**

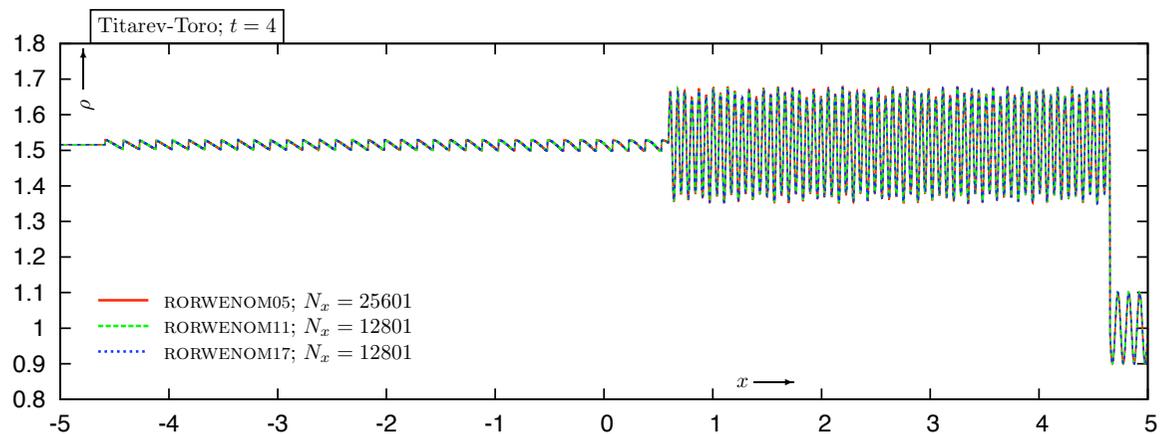
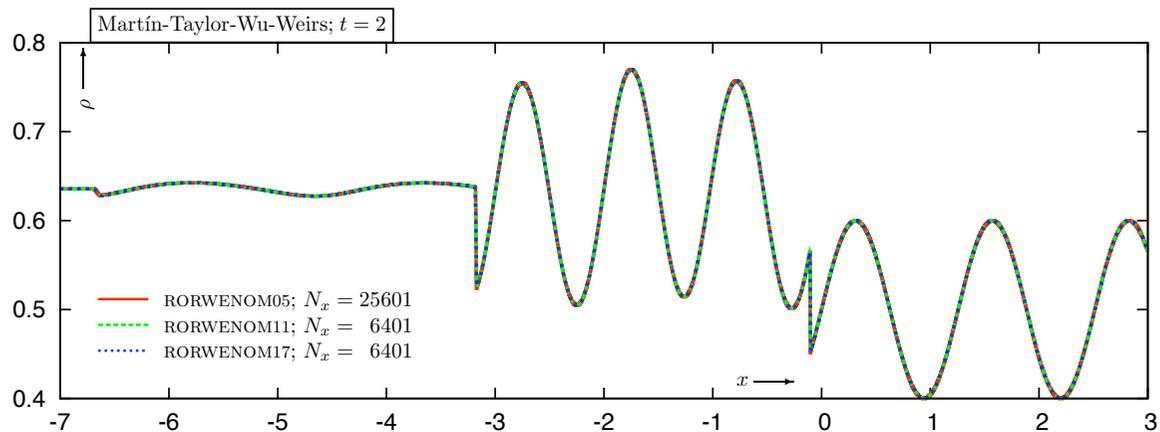
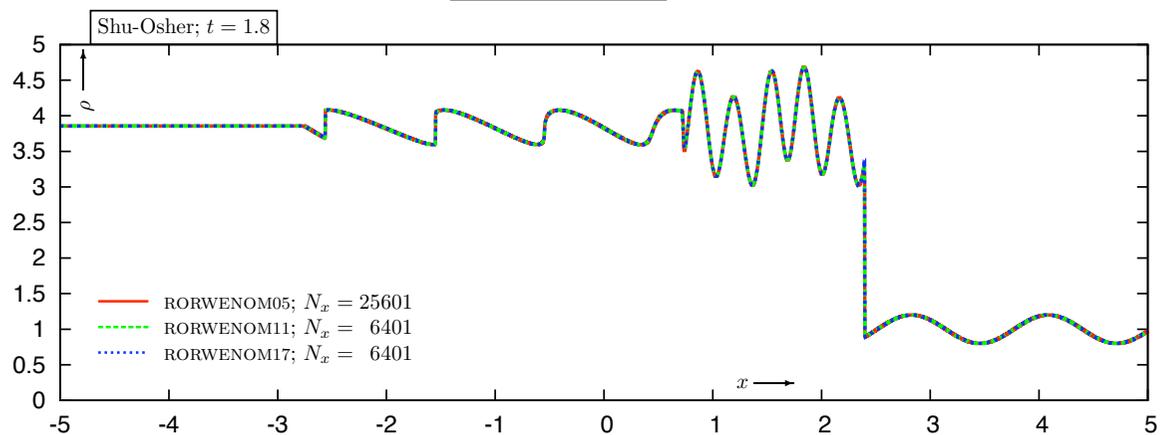
A. HARTEN, B. ENGQUIST, S. OSHER, S.R. CHAKRAVARTHY: *J. Comp. Phys.* **71** (1987) 231–303

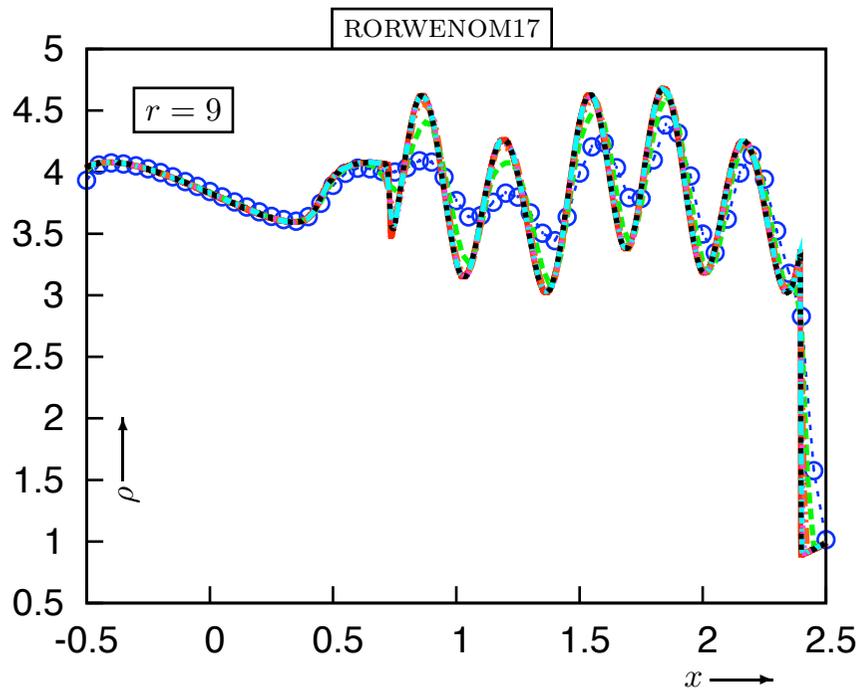
V.A. TITAREV, E.F. TORO: *J. Comp. Phys.* **201** (2004) 238–260

G.A. GEROLYMOS, D. SÉNÉCHAL, I. VALLET: *J. Comp. Phys.* **228** (2009) 8481–8524



SSPRK(3,3); CFL = 0.6

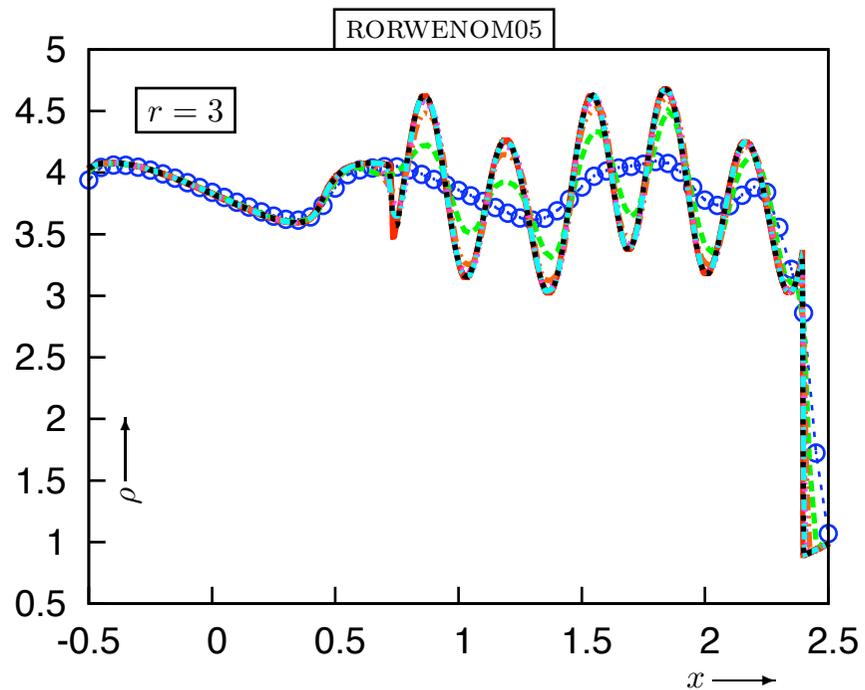
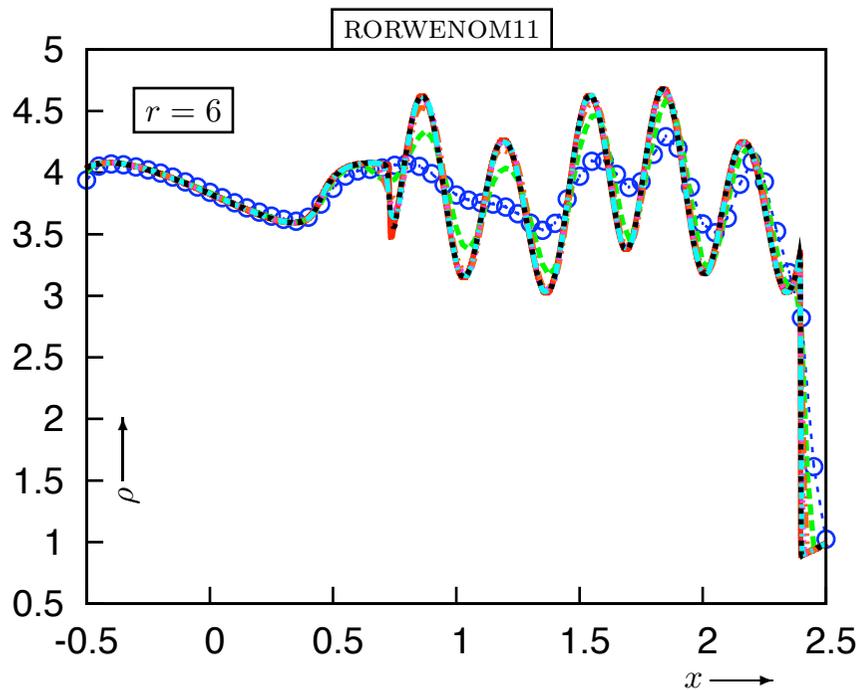




Shu-Osher;  $t = 1.8$

SSPRK(3, 3); CFL = 0.6

- grid-converged
- - -  $N_x = 201$
- - -  $N_x = 401$
- - -  $N_x = 801$
- · ·  $N_x = 1601$
- - -  $N_x = 3201$
- · ·  $N_x = 6401$





## Advection Diffusion Equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad u(t, 0) = u(t, L_x) \quad \forall t$$

$$; \quad 0 \leq a = \text{const}$$

$$; \quad 0 \leq \nu = \text{const}$$

$$\frac{d\hat{u}_\kappa}{dt} + ia\kappa\hat{u}_\kappa = -\nu\kappa^2\hat{u}_\kappa \quad ; \quad \kappa = \frac{2\pi n_x}{L_x} \quad ; \quad n_x \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{d\hat{u}_\kappa}{dt} + i \underbrace{\left[ a \Re\left(\frac{\kappa_{N_1}}{\kappa}\right) \right]}_{a_{N_\kappa}} \kappa \hat{u}_\kappa = - \underbrace{\left[ \nu \left(\frac{\kappa_{N_2}}{\kappa}\right)^2 + \frac{a \Im(-\kappa_{N_1})}{\kappa^2} \right]}_{\nu_{N_\kappa} = \nu_{N_{\kappa_2}} + \nu_{N_{\kappa_1}}} \kappa^2 \hat{u}_\kappa$$

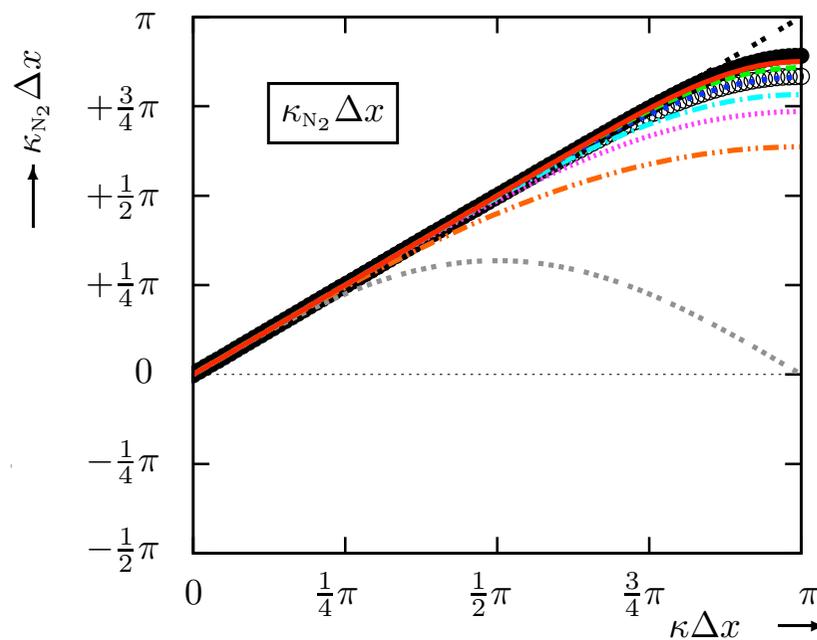
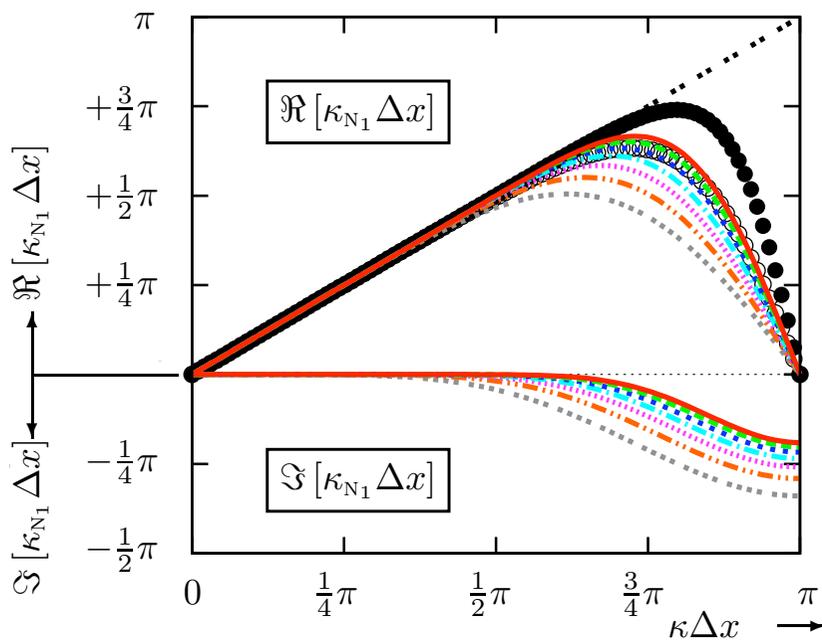


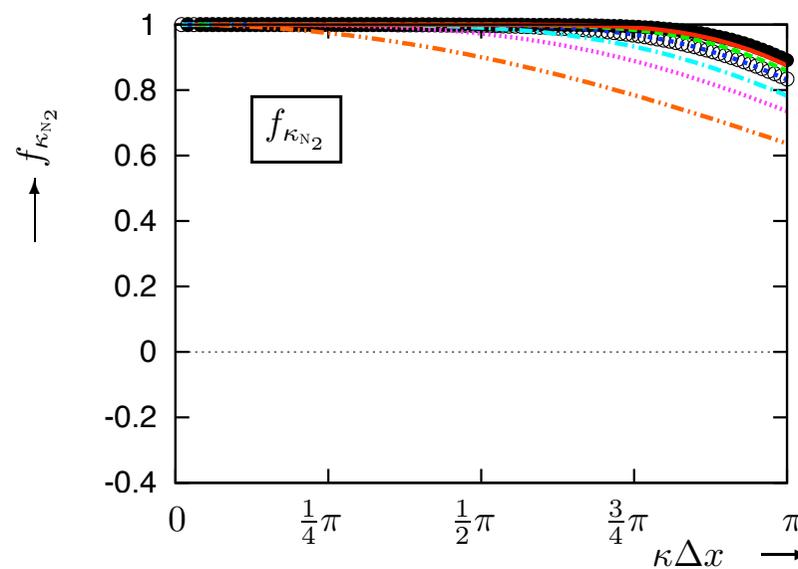
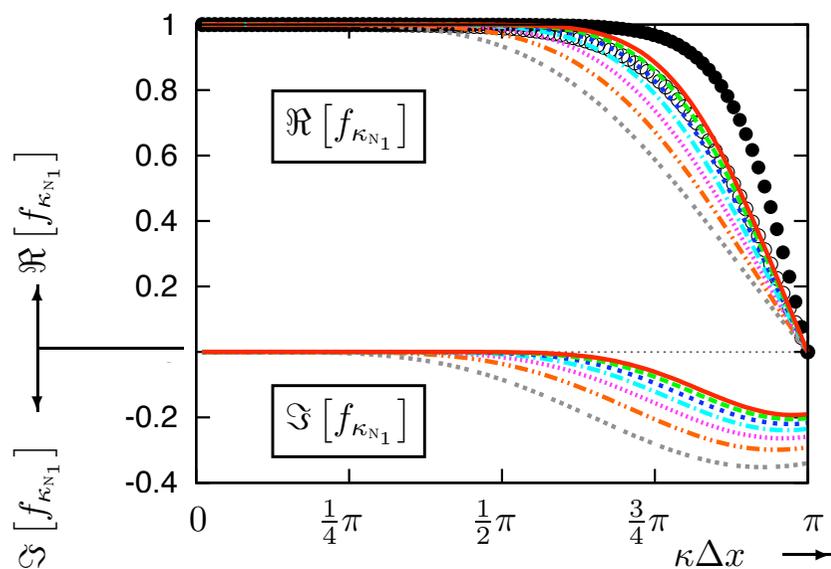
- UW17
- - - UW15
- ... UW13
- · - · UW11
- · · UW09
- · - · UW07
- · · UW05

- HC06 (Lele, 1992; 3-diag)
- HC10 (Lele, 1992; 5-diag)

- C18
- - - C14
- ... C10
- · - · C06
- · · C04
- · - · C02
- · · C02<sub>(2Δx)</sub>

- HC06 (Lele, 1992; 3-diag)
- HC10 (Lele, 1992; 5-diag)





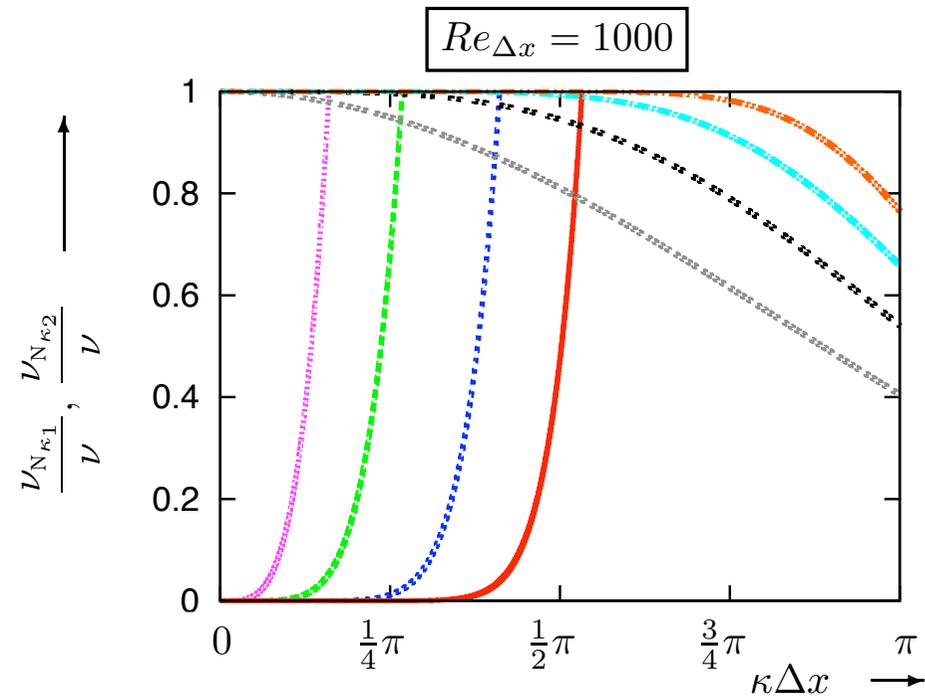
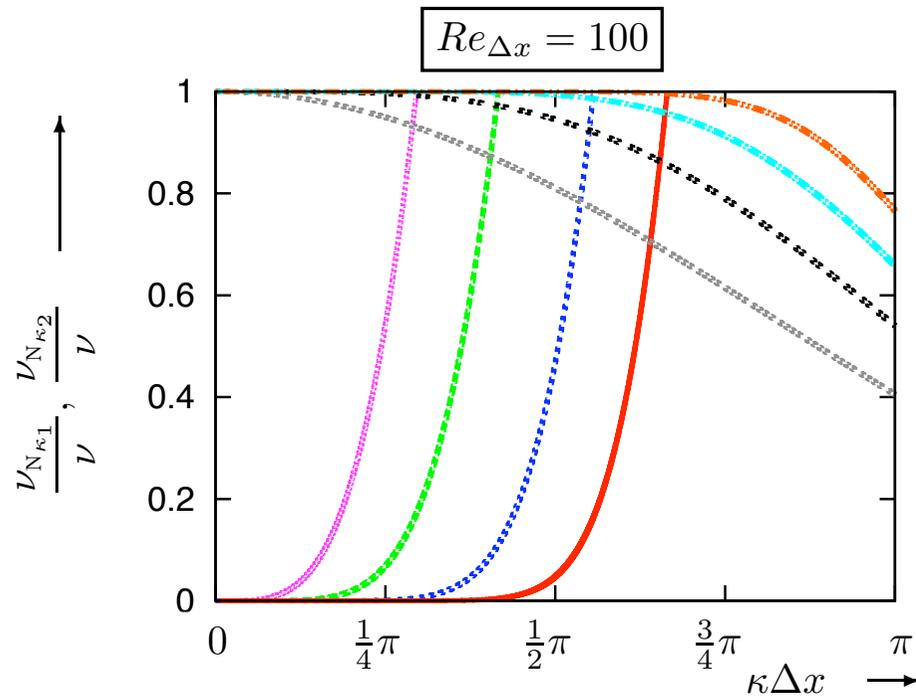
- UW17
- - - UW15
- · · UW13
- · - UW11
- · · UW09
- · - UW07
- · · UW05
- HC06 (Lele, 1992; 3-diag)
- HC10 (Lele, 1992; 5-diag)

- C18
- - - C14
- · · C10
- · - C06
- · · C04
- · - C02
- · · C02<sub>(2Δx)</sub>
- HC06 (Lele, 1992; 3-diag)
- HC10 (Lele, 1992; 5-diag)



## WENO(2r - 1)-C2s: Spectral Accuracy

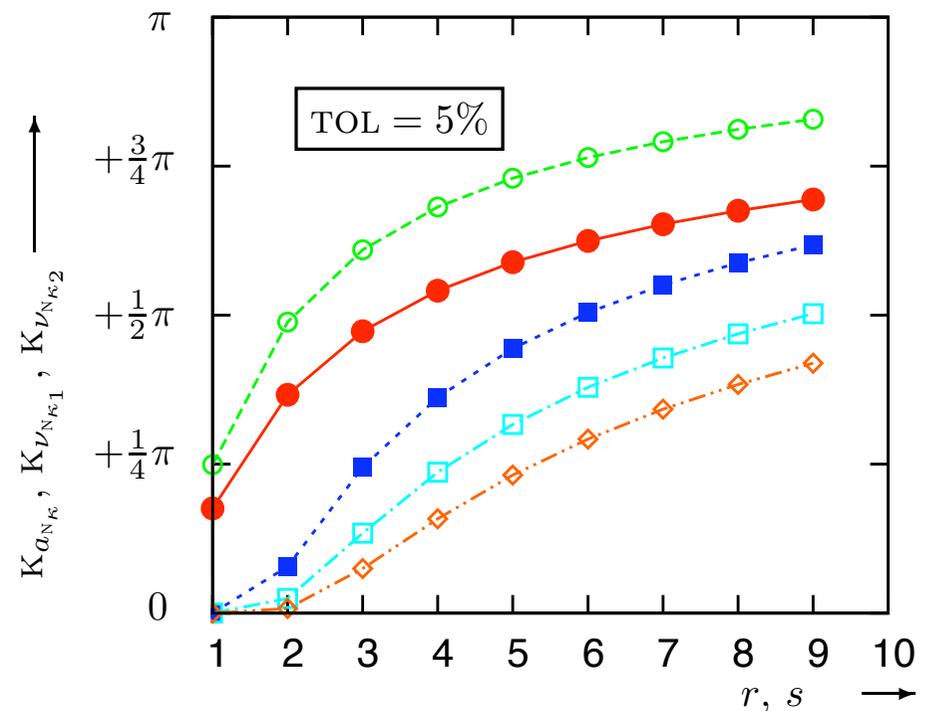
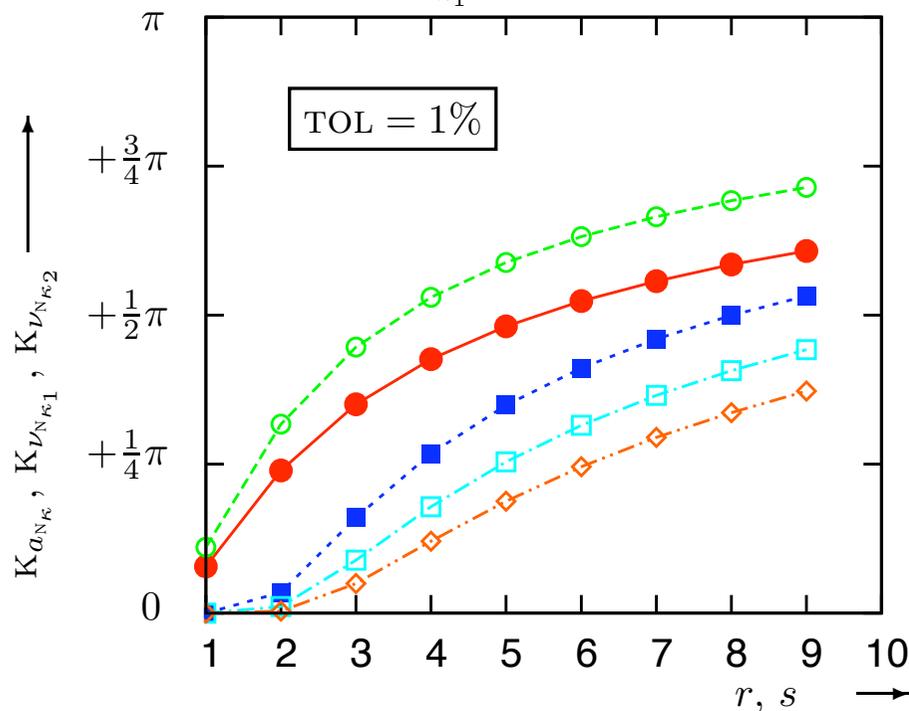
- $\nu_{N\kappa_1}$ ; UW17
- · ·  $\nu_{N\kappa_1}$ ; UW11
- - -  $\nu_{N\kappa_1}$ ; UW07
- · · ·  $\nu_{N\kappa_1}$ ; UW05
- · - ·  $\nu_{N\kappa_2}$ ; C18
- · - ·  $\nu_{N\kappa_2}$ ; C08
- · · ·  $\nu_{N\kappa_2}$ ; C04
- · · ·  $\nu_{N\kappa_2}$ ; C02





## WENO(2r - 1)-C2s: Spectral Accuracy

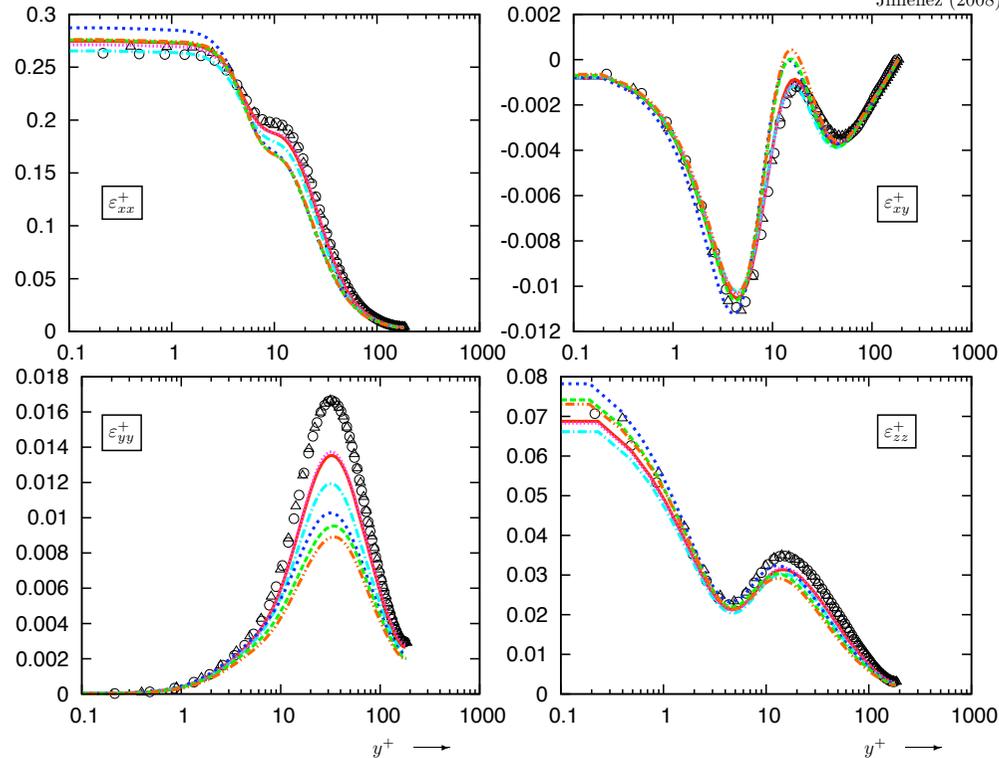
- $K_{a_{N\kappa}}(r, \text{TOL})$
- -○- -  $K_{\nu_{N\kappa 2}}(s, \text{TOL})$
- -■- -  $K_{\nu_{N\kappa 1}}(r, Re_{\Delta x} = 10, \text{TOL})$
- -□- -  $K_{\nu_{N\kappa 1}}(r, Re_{\Delta x} = 100, \text{TOL})$
- -◇- -  $K_{\nu_{N\kappa 1}}(r, Re_{\Delta x} = 1000, \text{TOL})$





## Plane Channel Flow DNS

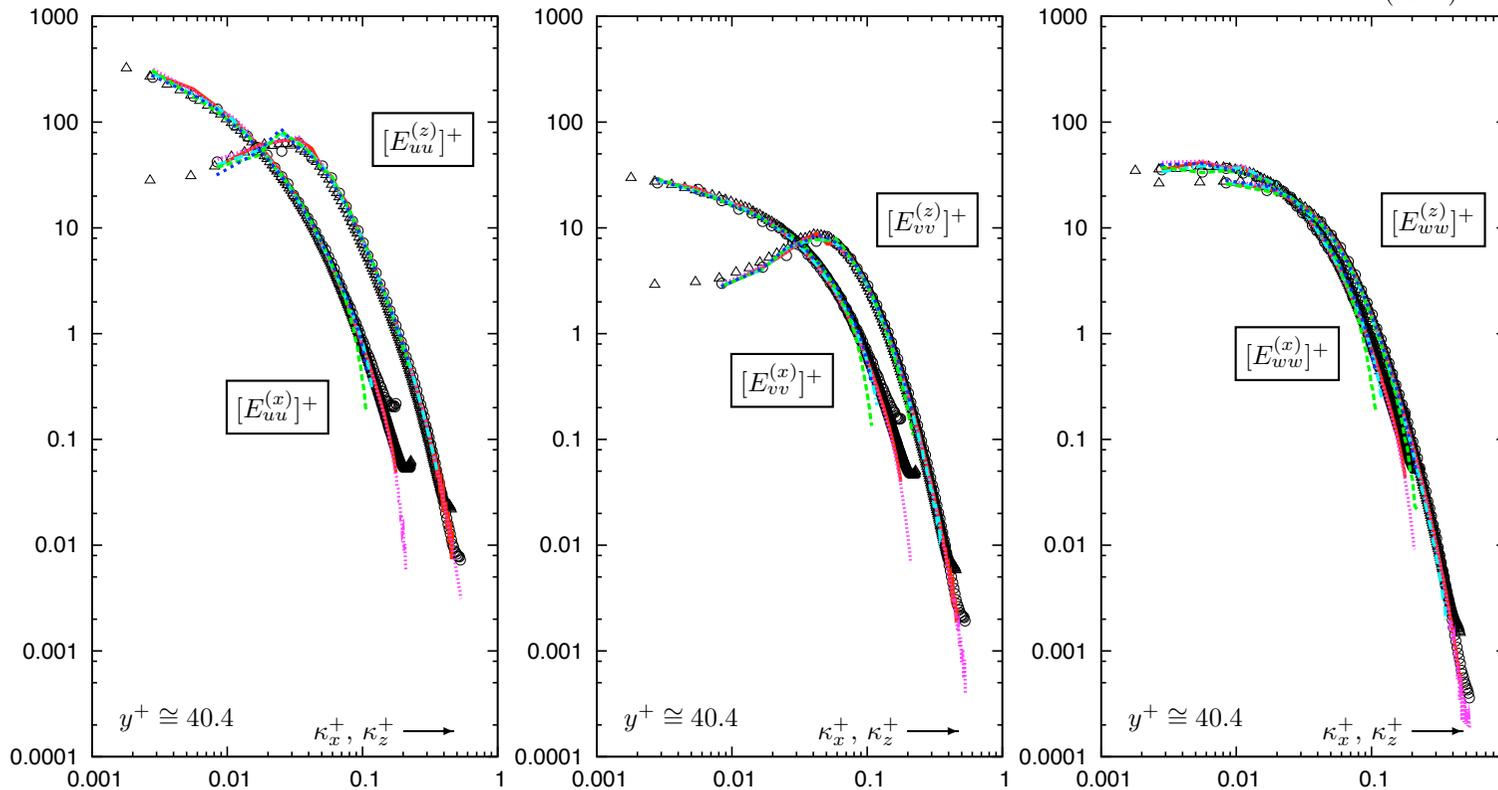
	$Re_{\tau_w}$	$\bar{M}_{CL}$	$N_x \times N_y \times N_z$	$L_x$	$L_y$	$L_z$	$\Delta x^+$	$\Delta y_w^+$	$N_{y^+ \leq 10}$	$\Delta y_{CL}^+$	$\Delta z^+$	$t_{OBS}^+$	
—	180	0.35	$193 \times 129 \times 169$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	11.8	0.23	20	5.0	4.5	1521	UW17-C02
- - -	180	0.35	$129 \times 129 \times 129$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	17.7	0.23	20	5.0	5.9	1539	UW17-C02
⋯	185	0.35	$121 \times 161 \times 81$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	19.4	0.19	25	4.5	9.7	1014	UW17-C02
⋯	179	0.35	$225 \times 129 \times 193$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	10.0	0.23	20	5.0	3.9	1012	UW11-C02
- - -	183	0.35	$121 \times 161 \times 81$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	19.2	0.19	25	4.5	9.6	1011	UW11-C02
- - -	182	0.35	$121 \times 161 \times 81$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	19.1	0.19	25	4.4	9.6	1032	UW09-C02
o	178	0.00	$128 \times 129 \times 128$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	17.7	0.05	14	4.4	5.9	1800	Moser et al. (1999)
△	186	0.00	$768 \times 97 \times 340$	$12\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	8.9	0.10	11	6.1	6.7	11740	Hoyas and Jiménez (2008)

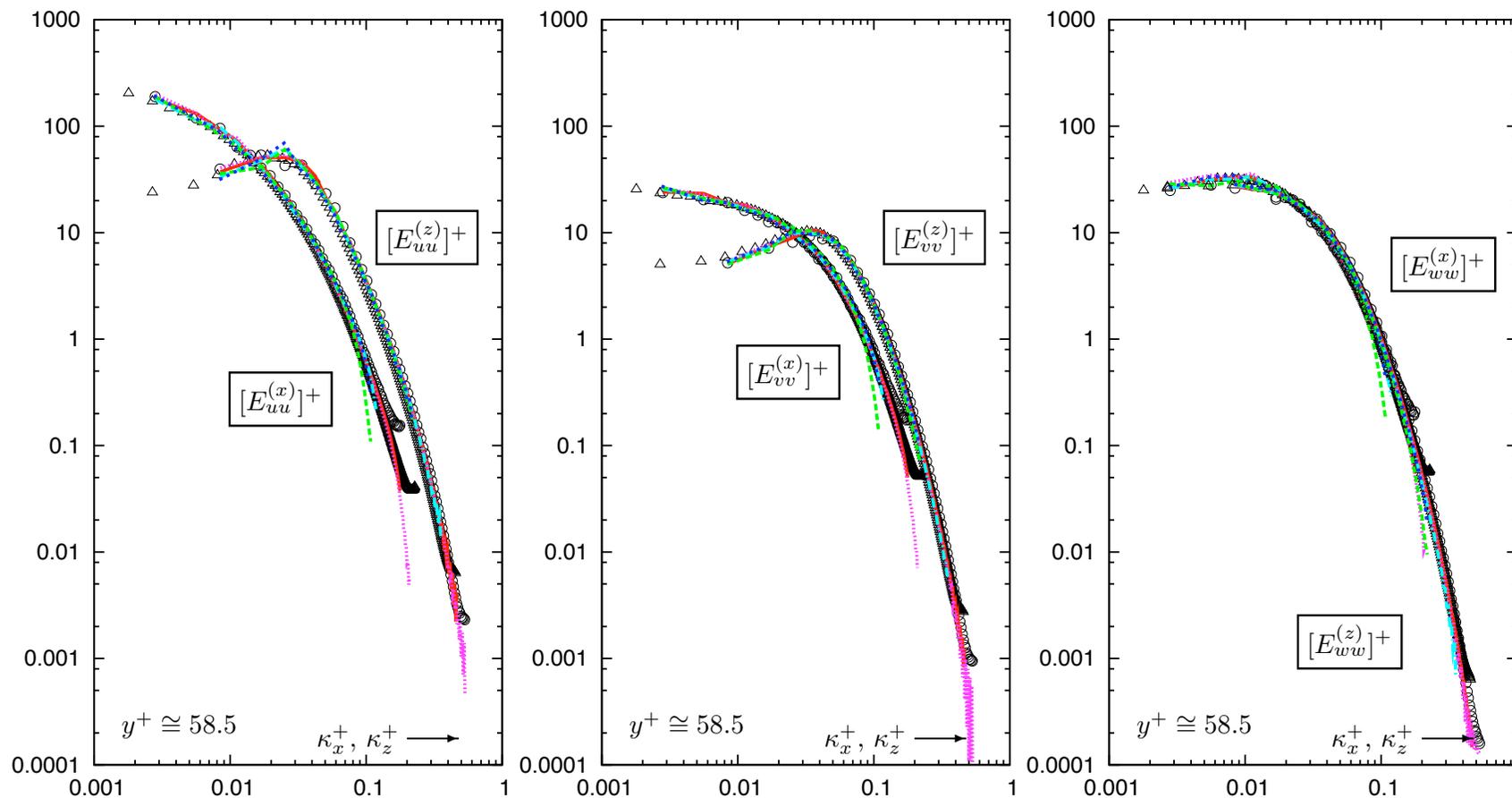


G.A. GEROLYMOS, D. SÉNÉCHAL, I. VALLET: *Int. J. Num. Meth. Fluids* (2010) in print



	$Re_{\tau_w}$	$\bar{M}_{CL}$	$N_x \times N_y \times N_z$	$L_x$	$L_y$	$L_z$	$\Delta x^+$	$\Delta y_w^+$	$N_{y^+ \leq 10}$	$\Delta y_{CL}^+$	$\Delta z^+$	$t_{OBS}^+$	
—	180	0.35	$193 \times 129 \times 169$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\frac{4\pi\delta}{4}$	11.8	0.23	20	5.0	4.5	1521	UW17-C02
- - -	180	0.35	$129 \times 129 \times 129$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\frac{4\pi\delta}{4}$	17.7	0.23	20	5.0	5.9	1539	UW17-C02
⋯	185	0.35	$121 \times 161 \times 81$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\frac{4\pi\delta}{4}$	19.4	0.19	25	4.5	9.7	1014	UW17-C02
⋯	179	0.35	$225 \times 129 \times 193$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\frac{4\pi\delta}{4}$	10.0	0.23	20	5.0	3.9	1012	UW11-C02
- - -	183	0.35	$121 \times 161 \times 81$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\frac{4\pi\delta}{4}$	19.2	0.19	25	4.5	9.6	1011	UW11-C02
o	178	0.00	$128 \times 129 \times 128$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\frac{4\pi\delta}{4}$	17.7	0.05	14	4.4	5.9	1800	Moser <i>et al.</i> (1999)
△	186	0.00	$768 \times 97 \times 340$	$12\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	8.9	0.10	11	6.1	6.7	11740	del Álamo <i>et al.</i> (2004)





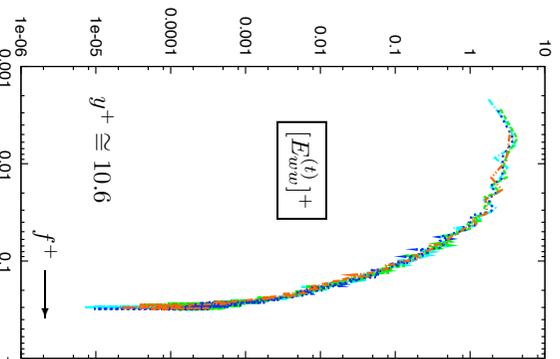
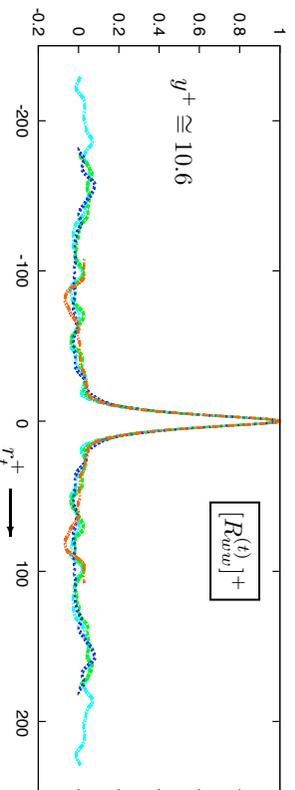
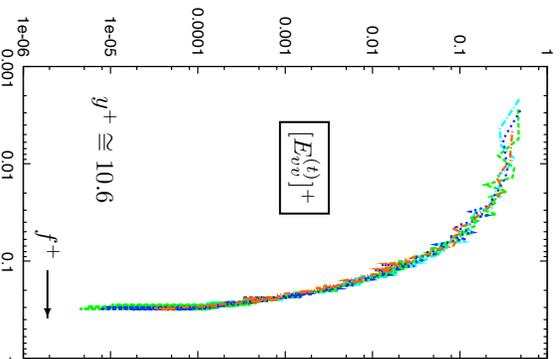
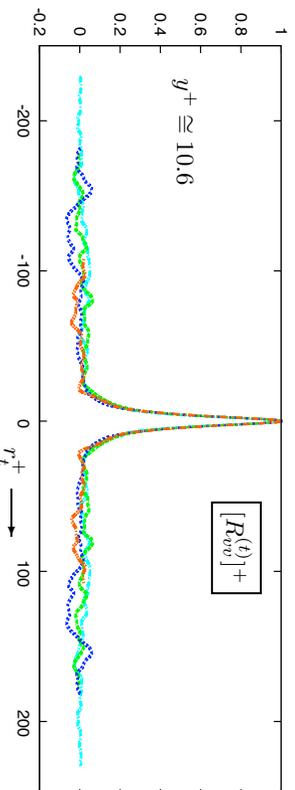
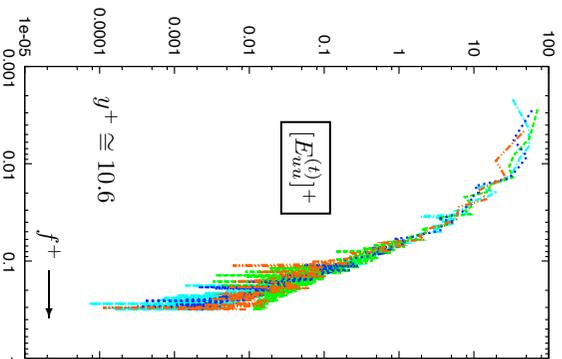
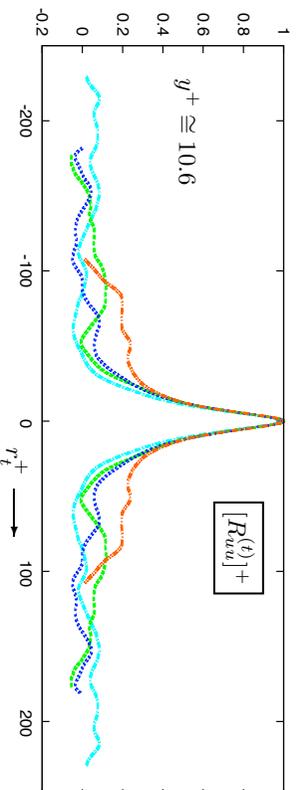
	$Re_{\tau_w}$	$\bar{M}_{CL}$	$N_x \times N_y \times N_z$	$L_x$	$L_y$	$L_z$	$\Delta x^+$	$\Delta y_w^+$	$N_{y^+ \leq 10}$	$\Delta y_{CL}^+$	$\Delta z^+$	$t_{OBS}^+$	
—	180	0.35	$193 \times 129 \times 169$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\pi\delta$	11.8	0.23	20	5.0	4.5	1521	UW17-C02
- - -	180	0.35	$129 \times 129 \times 129$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\pi\delta$	17.7	0.23	20	5.0	5.9	1539	UW17-C02
⋯	185	0.35	$121 \times 161 \times 81$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\pi\delta$	19.4	0.19	25	4.5	9.7	1014	UW17-C02
⋯	179	0.35	$225 \times 129 \times 193$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\pi\delta$	10.0	0.23	20	5.0	3.9	1012	UW11-C02
- - -	183	0.35	$121 \times 161 \times 81$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\pi\delta$	19.2	0.19	25	4.5	9.6	1011	UW11-C02
○	178	0.00	$128 \times 129 \times 128$	$4\pi\delta$	$2\delta$	$\pi\delta$	17.7	0.05	14	4.4	5.9	1800	Moser <i>et al.</i> (1999)
△	186	0.00	$768 \times 97 \times 340$	$12\pi\delta$	$2\delta$	$4\pi\delta$	8.9	0.10	11	6.1	6.7	11740	del Álamo

# DNS time-stepping

$Re_{\tau_w}^c$	$\bar{M}_{\alpha_1}$	$N_x \times N_y \times N_z$	$t_{\text{obs}}^+$
180	0.35	$129 \times 129 \times 169$	679
			541
			579
			252

Method
UW17-RK4
UW17-e <sub>0</sub> DTSBDF2
UW17-e <sub>0</sub> DTSBDF3
UW17-e <sub>0</sub> DTSBDF4





## Origin of $p'$ : Transport Equation for $p$

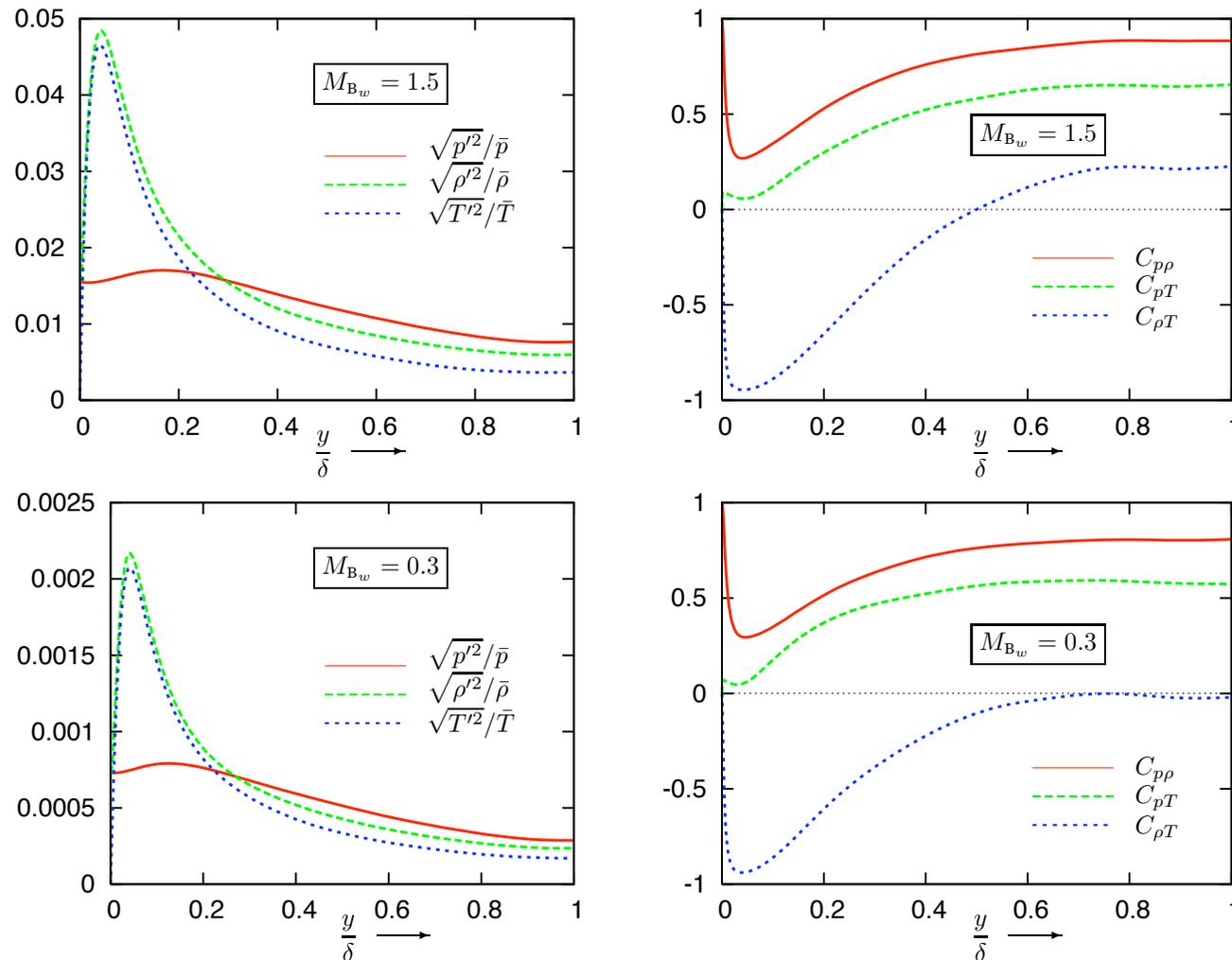
$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} \\ \rho T \frac{Ds}{Dt} &= \left( \tau_{ml} S_{ml} - \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \right) \\ \frac{Dp}{Dt} &= -\rho a^2 \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} + \lambda_G \left( \tau_{ml} S_{ml} - \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \right) \\ \rho c_p \frac{DT}{Dt} &= -\rho \beta_p T a^2 \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} + (1 + \lambda_G \beta_p T) \left( \tau_{ml} S_{ml} - \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \right) \\ \rho \frac{Dh}{Dt} &= -\rho a^2 \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} + (1 + \lambda_G) \left( \tau_{ml} S_{ml} - \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \right) \end{aligned}$$

$$\lambda_G := \frac{\rho}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\beta_p a^2}{c_p}$$

$$Z = 1 \implies \frac{Dp}{Dt} = -\gamma p S_{\ell\ell} + (\gamma - 1) \tau_{ml} S_{ml} - (\gamma - 1) \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}$$

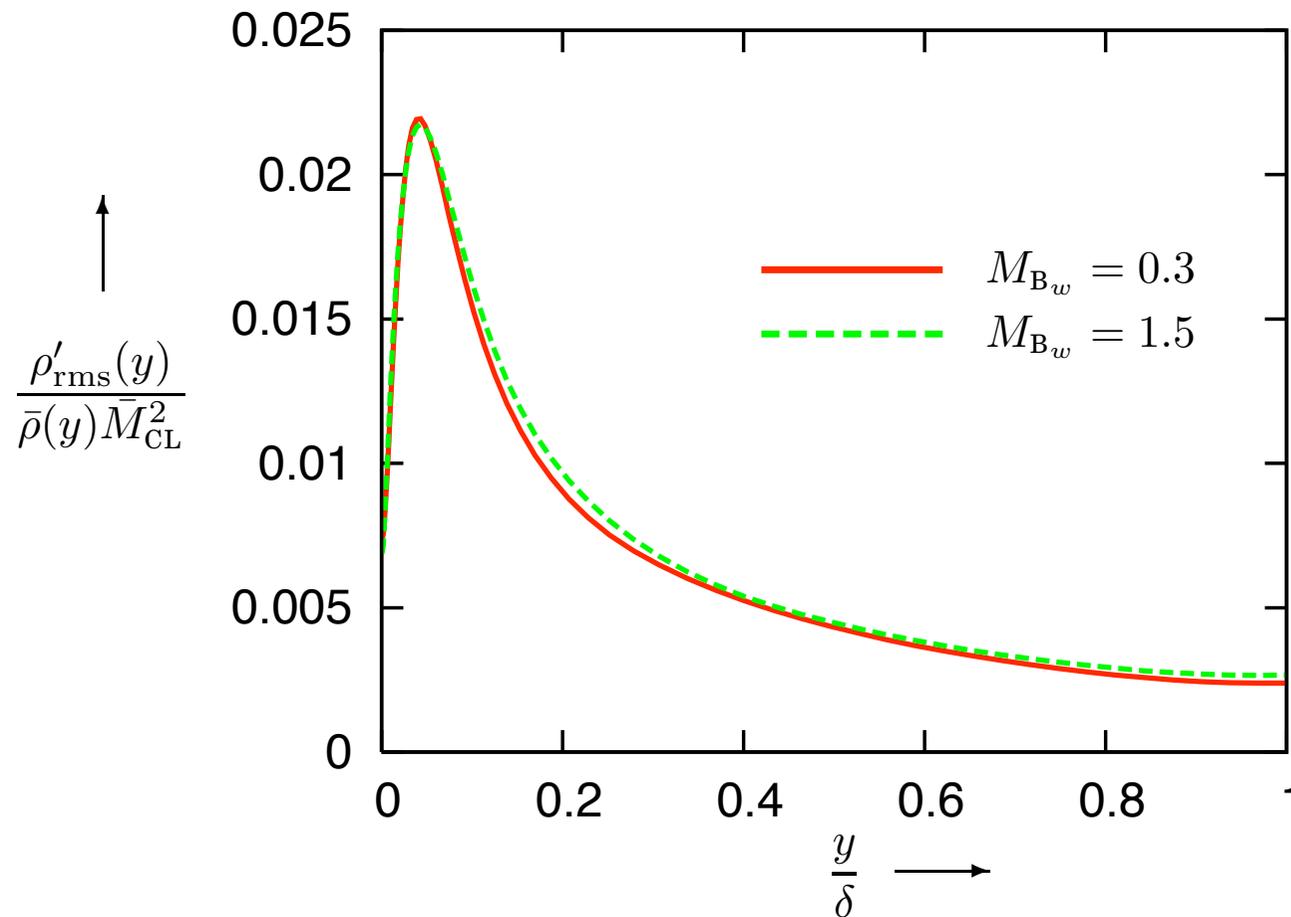


# Compressible Wall-Turbulence ( $Re_{\tau_w} = 230$ )





## Compressible Wall-Turbulence ( $Re_{\tau_w} = 230$ )



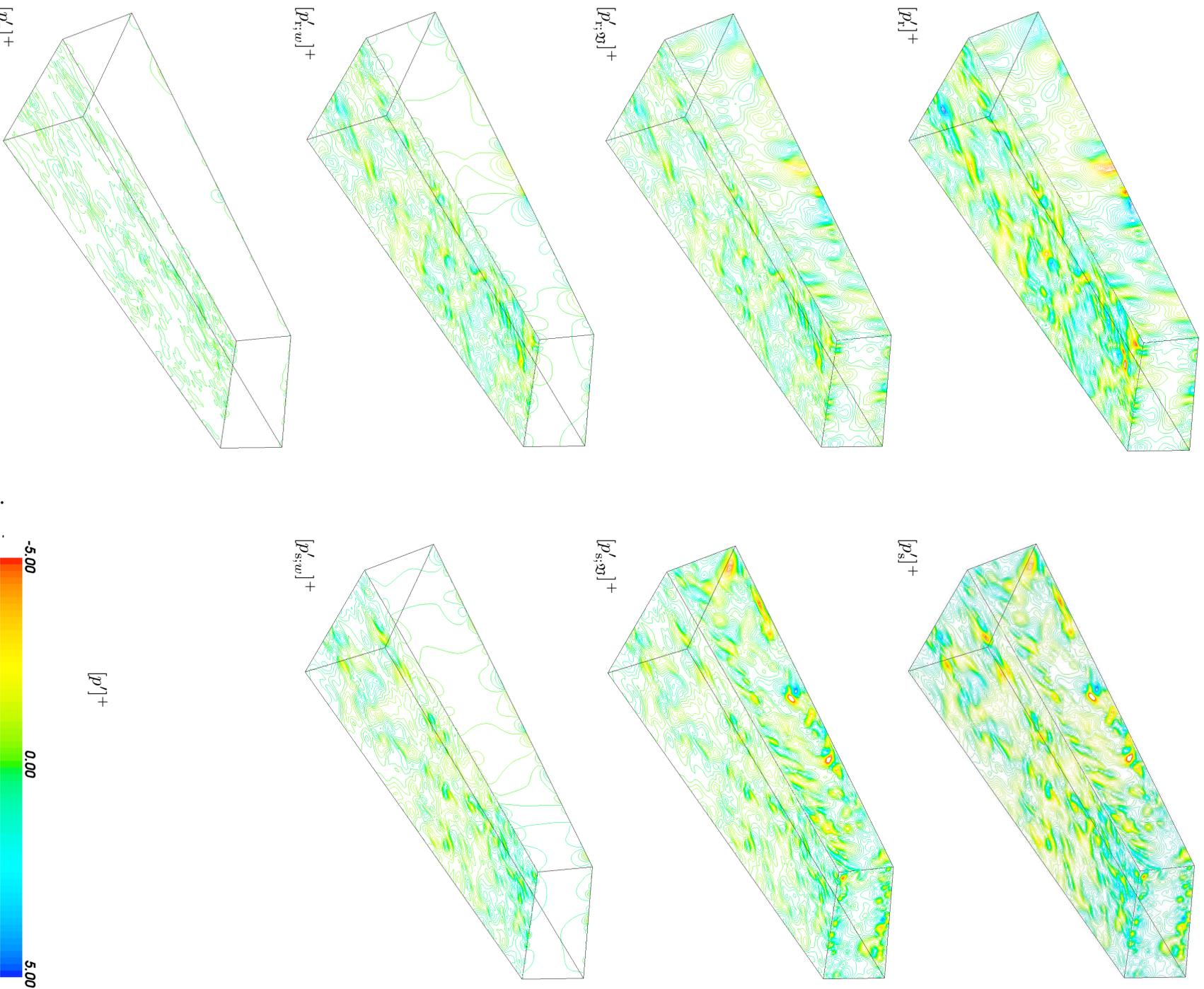
G.A. GEROLYMOS, D. SÉNÉCHAL, I. VALLET: *AIAA Paper 2007-3408* (2007)



## Origin of $p'$ : Poisson-equation for $p'$

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 p' = & \underbrace{\frac{\partial^2 \tau_{ij}'}{\partial x_i \partial x_j}}_{Q'_{(\tau)}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho f_{v_i} - \overline{\rho f_{v_i}})}_{Q'_{(\text{BF})}} \\
 & + \underbrace{\left[ -\bar{\rho} \left( \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} - \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} \right) \right]}_{Q'_{(s)}} + \underbrace{\left[ - \left( \rho' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} - \overline{\rho' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} \right) \right]}_{Q'_{(\rho's)}} \\
 & + \underbrace{\left[ -2\bar{\rho} \left( \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right]}_{Q'_{(r)}} + \underbrace{\left[ -2 \left( \rho' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} - \overline{\rho' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \right) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right]}_{Q'_{(\rho'r)}} + \underbrace{\left[ -\rho' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right]}_{Q'_{(\rho')}} \\
 & + \underbrace{\left[ - \left( \rho' \frac{D\Theta}{Dt} + \rho \left[ \frac{D\Theta}{Dt} \right]' - \overline{\rho' \frac{D\Theta'}{Dt}} \right) \right]}_{Q'_{(\Theta)}} + \underbrace{\left[ - \left( \left[ \frac{Du_i}{Dt} \right]' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \right) \right]}_{Q'_{(\dot{v}\nabla\bar{\rho})}} + \underbrace{\left[ - \left( \frac{Du_i}{Dt} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} - \left[ \frac{Du_i}{Dt} \right]' \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \right) \right]}_{Q'_{(\dot{v}\nabla\rho')}}
 \end{aligned}$$

$p'$ -splitting ( $Re_{\tau_w} = 180, M_{B_w} = 0.3, M_{CL} = 0.34; t^+_{(OBS;GF)} = 82$ )

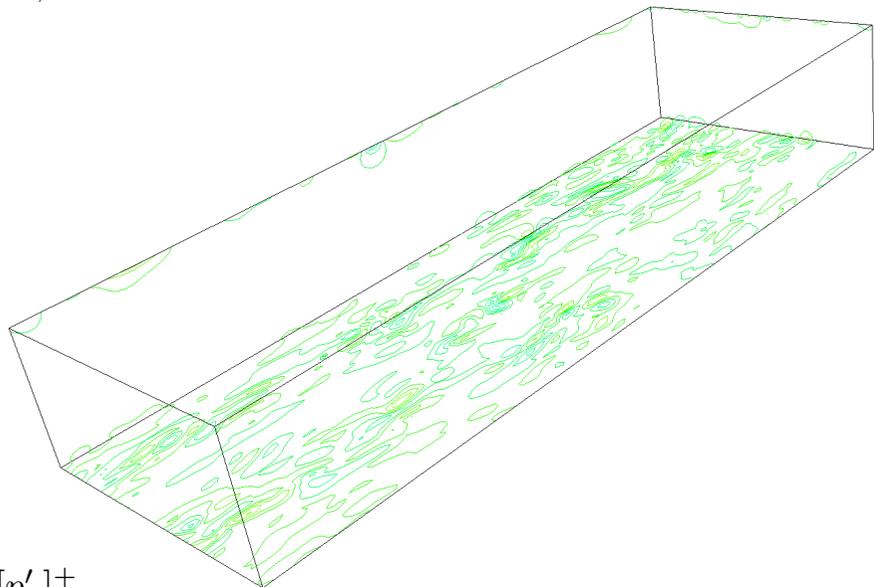


Aussois, dec 7-10, 2009  
 CNRS GDR Turbulence  
 DNS of Compressible Wall-Turbulence

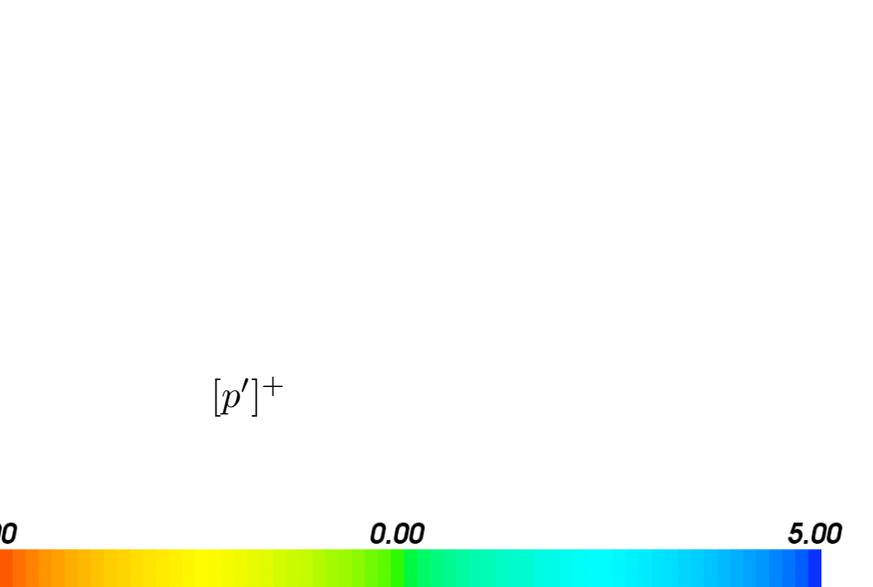
UNIVERSITE  
 PIERRE & MARIE  
 CURIE  
 LA SCIENCE A PARIS



$[p'_{r;w}]^+$



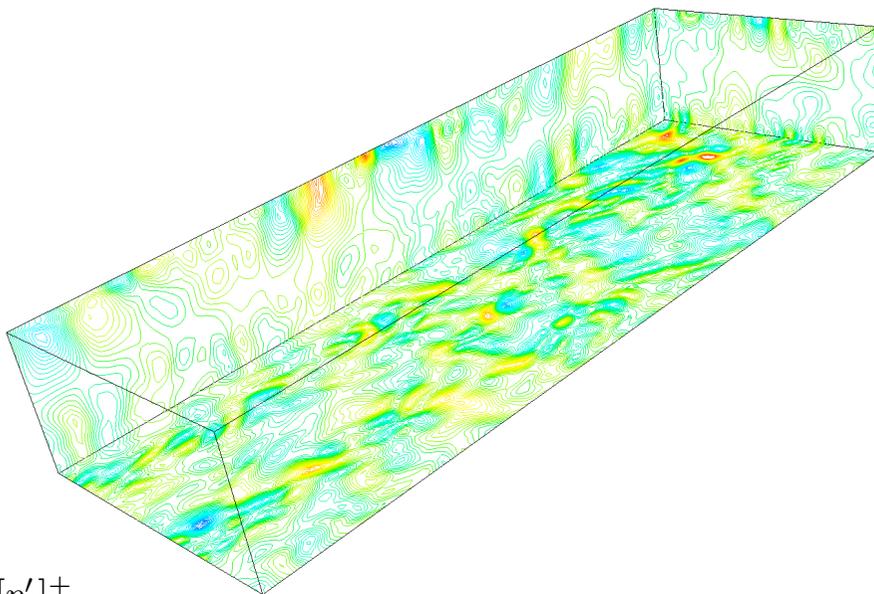
$[p'_{s;w}]^+$



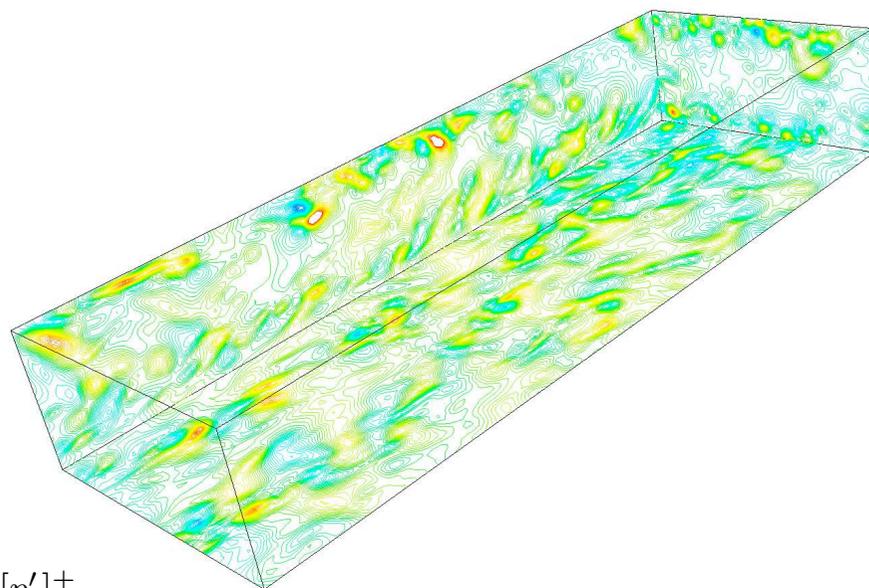
$[p']^+$



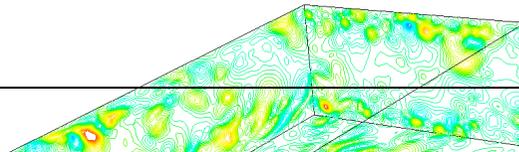
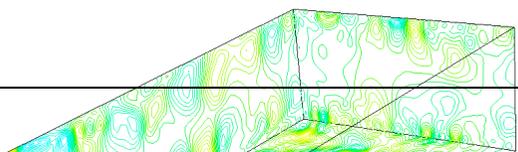
$[p'_\tau]^+$



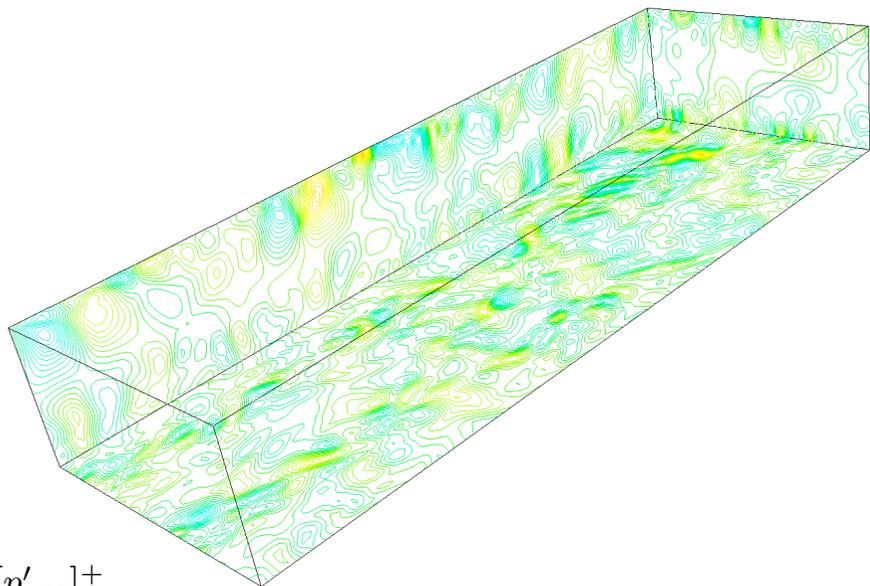
$[p'_s]^+$



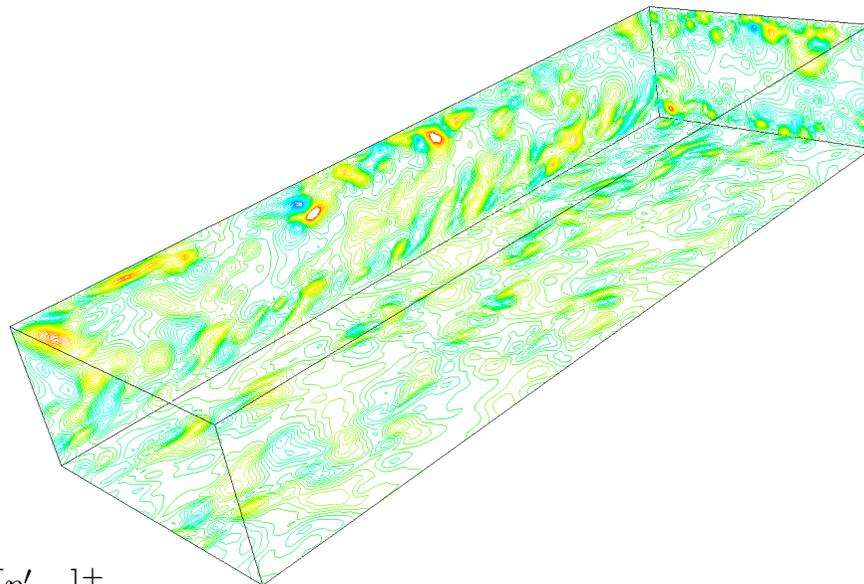
$[p'_r]^+$



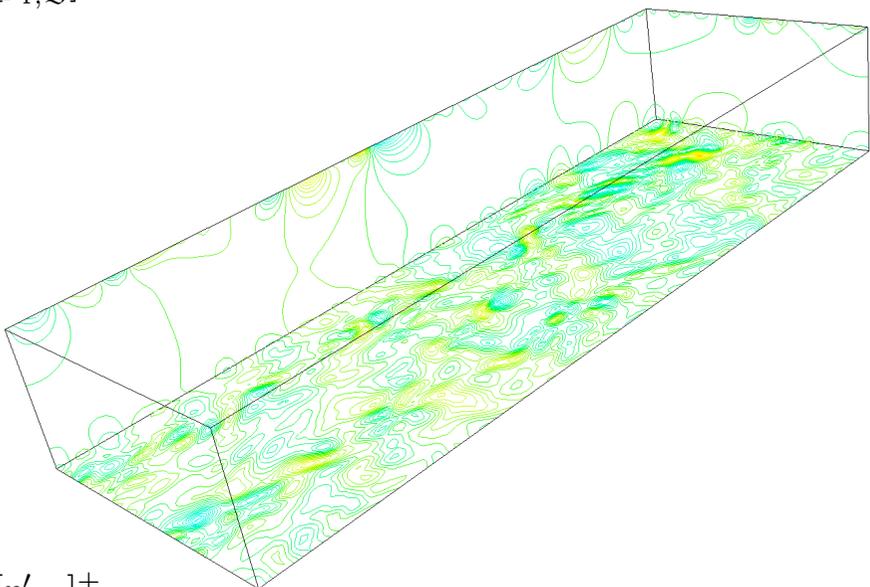
$[p'_r]^+$



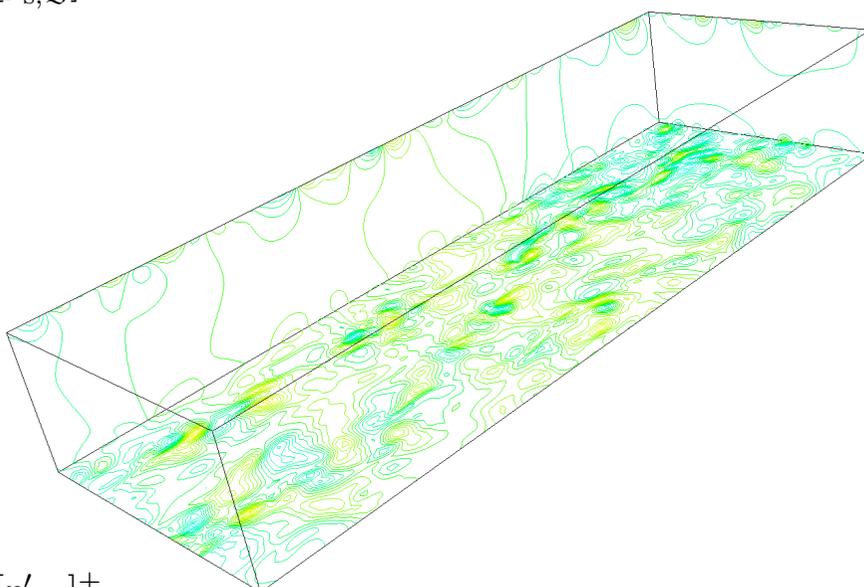
$[p'_s]^+$



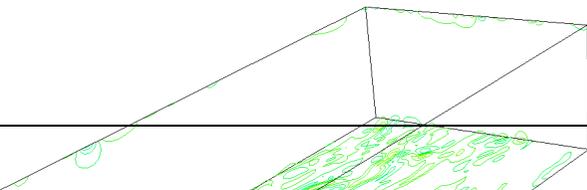
$[p'_{r;\mathfrak{w}}]^+$



$[p'_{s;\mathfrak{w}}]^+$



$[p'_{r;w}]^+$



$[p'_{s;w}]^+$





## Contents

- **motivation**
  - **compressible aerodynamics CFD and CAA**
  - **compressible DNS database**
  - **modelling for VLES**
- **DNS and Very-High-Order Schemes**
  - **Very-High-Order WENO Schemes**
  - **WENO schemes for compressible DNS**
  - **compressible turbulence**
  - $p', \rho', T', s'$
- **aerodynamics: an open source project**
  - <http://sourceforge.net/projects/aerodynamics>
  - <http://www.aerodynamics.fr>

# Simulation des grandes échelles couplée à une modélisation stochastique de l'accélération de sous-maille pour un écoulement de canal à grand nombre de Reynolds

Rémi Zamansky, Ivana Vinkovic, Mikhael Gorokhovski

*Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, École Centrale de Lyon, 36 avenue Guy-de-Collongue, F-69134 Écully Cedex, FRANCE*

Dans ce travail, l'écoulement turbulent dans un canal est simulé par une équation modèle, dans laquelle l'accélération instantanée est décomposée en une partie filtrée et une partie de sous-maille [1] :  $\frac{du_i}{dt} = \left(\frac{du_i}{dt}\right) + \left(\frac{du_i}{dt}\right)'$ . Chacune de ces parties doit être modélisée. La partie filtrée de l'accélération est modélisée par l'approche LES (Large Eddy Simulation) classique en utilisant un modèle de viscosité turbulente. Le modèle pour l'accélération de sous-maille est basé sur deux processus stochastiques. L'un pour la norme, qui est construit à partir des processus de fragmentation avec symétrie d'échelle [2]. L'autre pour l'orientation, basé sur une marche aléatoire sur une sphère, de manière à représenter la relaxation vers l'isotropie lorsque la distance à la paroi augmente. Les principaux paramètres pour ces modèles sont le nombre de Reynolds basée sur la vitesse de frottement et la hauteur de canal.

Afin de valider ces modèles, des comparaisons avec l'accélération aux petites échelles obtenues par DNS ont été réalisées pour des nombres de Reynolds de  $Re_\tau = 180, 590$  et  $1000$ . Et pour évaluer globalement cette approche, les résultats fournis par l'approche LES-SSAM (Large Eddy Simulation with Subgrid Stochastic Acceleration Model) ont été comparés avec ceux fournis par une LES classique et par DNS pour des nombres de Reynolds de  $Re_\tau = 590, 1000$  et  $2000$ .

## Références

- [1] V. Sabelnikov, A. Chtab, and M. Gorokhovski. The coupled LES - sub-grid stochastic acceleration model (LES-SSAM) of a high Reynolds number flows. In *Advances in Turbulence XI*, volume 117, pages 209–211, 11th EUROMECH European Turbulence Conference, June 25-28, 2007, Porto, Portugal, 2007. Springer Proceedings in Physics.
- [2] M. Gorokhovski and V. L. Saveliev. Statistical universalities in fragmentation under scaling symmetry with a constant frequency of fragmentation. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 41 :085405, 2008.