

Turbulence d'onde dans les plaques élastiques minces

expériences à l'ENS et à l'ENSTA

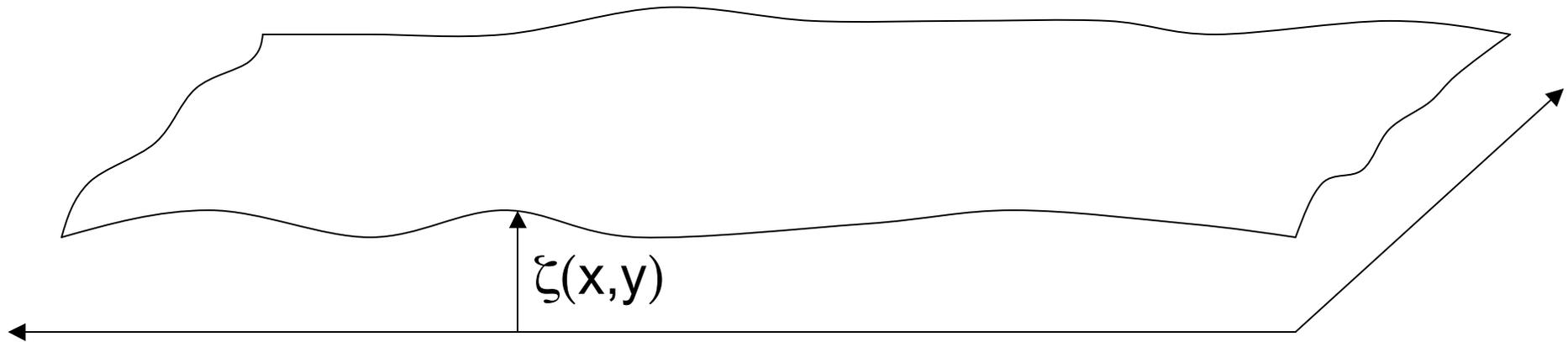
O. Cadot (ENSTA) & N. Mordant (ENS)

articles soumis à PRL

A. Boudaoud, O. Cadot, B. Odille & C. Touzé,
Observation of wave turbulence in vibrating plates

N. Mordant, *Are there waves in elastic wave turbulence ?*

théorie: faible déformations d'un plaque mince



équations de Föppl-von Kármán

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\} \qquad \frac{1}{E} \Delta^2 \chi = -\frac{1}{2} \{\zeta, \zeta\}$$

ondes linéaires $\omega = \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)\rho}} k^2$

h épaisseur de la plaque, E module d'Young, σ coef. de Poisson, ρ masse volumique

turbulence d'onde

théorie de Zakharov de « turbulence faible »

- équilibre: Rayleigh-Jeans $E_\zeta(k) \propto \frac{1}{k^3}$
- hors équilibre: spectre de Kolmogorov-Zakharov

interaction à 4 ondes



$$E_\zeta(k) \propto \frac{P^{1/3}}{[12(1 - \sigma^2)]^{1/6}} \frac{\ln^{1/3}(k^*/k)}{\sqrt{E/\rho} k^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1 - \sigma^2)\rho}} k^2$$

$$E_v(\omega) \propto \frac{hP^{1/3}}{[12(1 - \sigma^2)]^{2/3}} \ln^{1/3}(\omega^*/\omega)$$

analyse dimensionnelle

analytique:
$$E_v(\omega) \propto \frac{hP^{1/3}}{[12(1 - \sigma^2)]^{2/3}} \ln^{1/3}(\omega^*/\omega)$$

Connaughton *et al.*
Physica D 2003
$$\omega = \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1 - \sigma^2)\rho}} k^2 + \text{interactions à 4 ondes}$$

$$E_v(\omega) \sim P^{1/3} \left(\frac{Eh^2}{12(1 - \sigma^2)\rho} \right)^{1/4} \omega^{-1/2}$$

de manière générale
 E, ρ, h, P
$$E_v(\omega) = h \sqrt{\frac{E}{\rho}} g \left(\frac{h\omega}{P^{1/3}}, P \left(\frac{\rho}{E} \right)^{3/2} \right)$$

$$\omega^* \sim P^{1/3} / h$$

$$P = \frac{\text{puissance}}{\rho S}$$

expérience à l'ENS



acier inox
2x1 m²
 $h=0.4$ mm
 $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Pa
 $\sigma \approx 0.3$
 $\rho \approx 8000$ kg/m³

excitation: vibreur

mesures:

- vitesse normale:
vibromètre laser
(un ou deux points)
- puissance injectée:
accéléromètre
force

expérience à l'ENSTA

Plaque de réverbération (EMT140, Radio France)

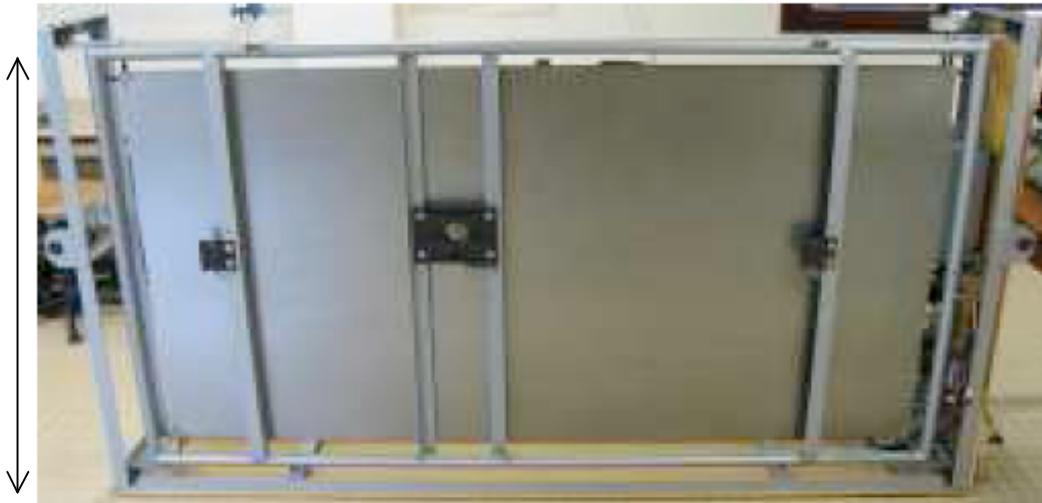


$h = 0.5\text{mm}$
 $E = 200\text{GPa}$
 $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$
 $\nu = 0.3$

2m



1m



$$f = hck^2, \text{ with } c = \sqrt{E/12\rho(1-\nu^2)}/2\pi$$



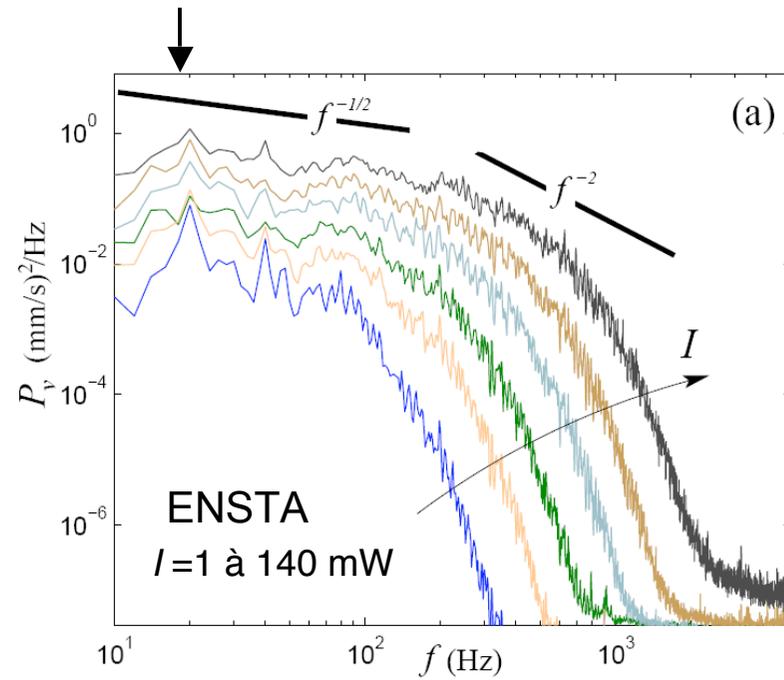
- Pot vibrant +tête d'impédance
 - Tension sinusoïdale



- Bobine-aimant
 - Force sinusoïdale ou aléatoire

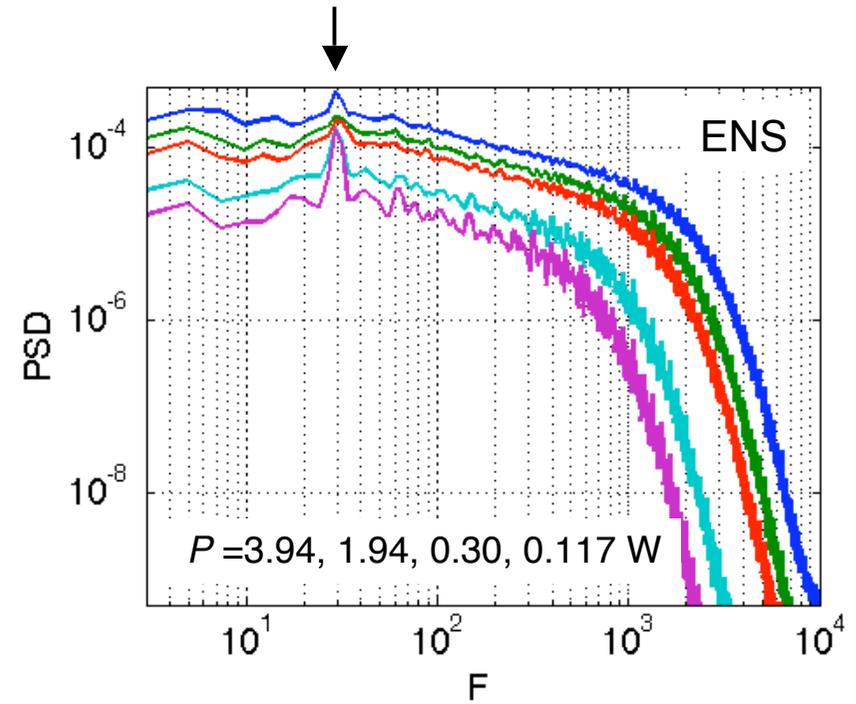
spectres de vitesse

forçage sinusoidal

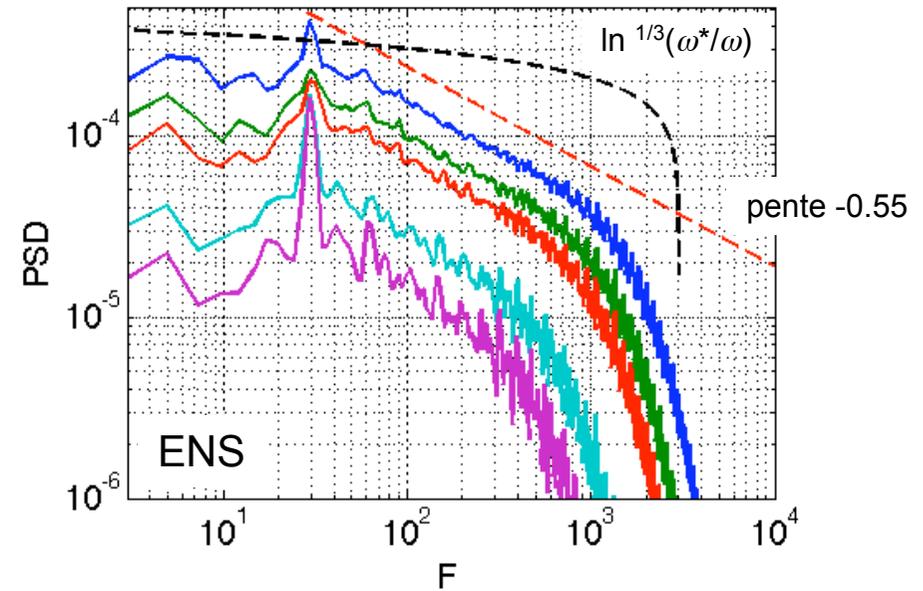


$$P_v(f) \sim f^{-\beta} \text{ with } \beta = 0.5 \pm 0.2,$$

forçage sinusoidal



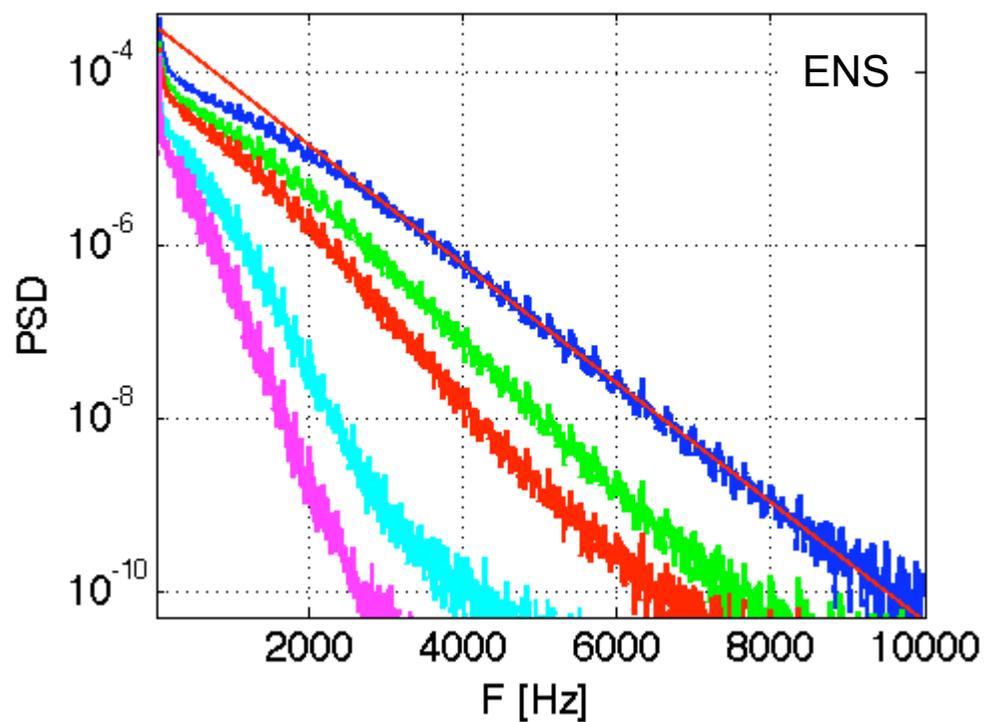
spectre de vitesse



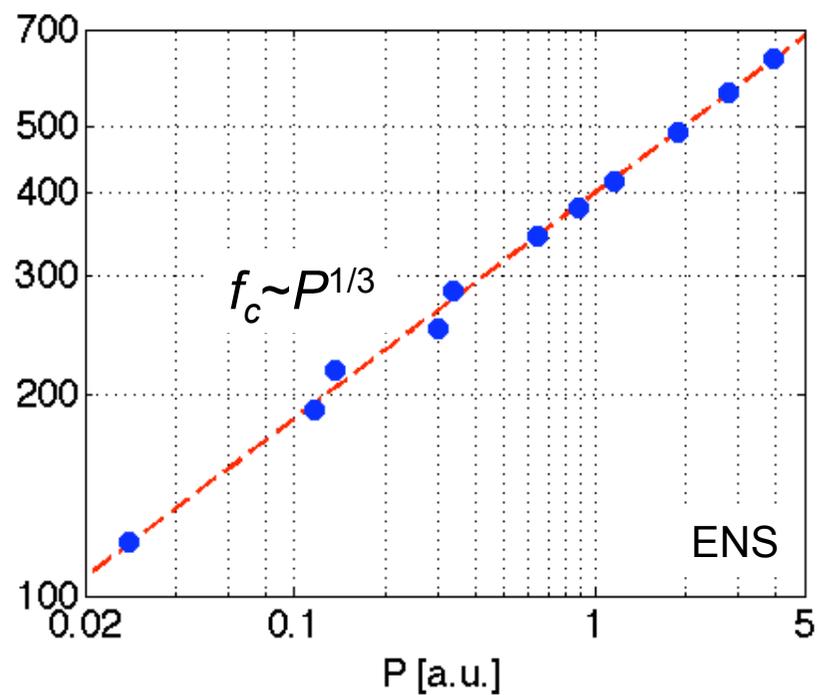
prédiction analytique:
$$E_v(\omega) \propto \frac{hP^{1/3}}{[12(1 - \sigma^2)]^{2/3}} \ln^{1/3}(\omega^*/\omega)$$

spectre de vitesse

coupure exponentielle



fréquence de coupure

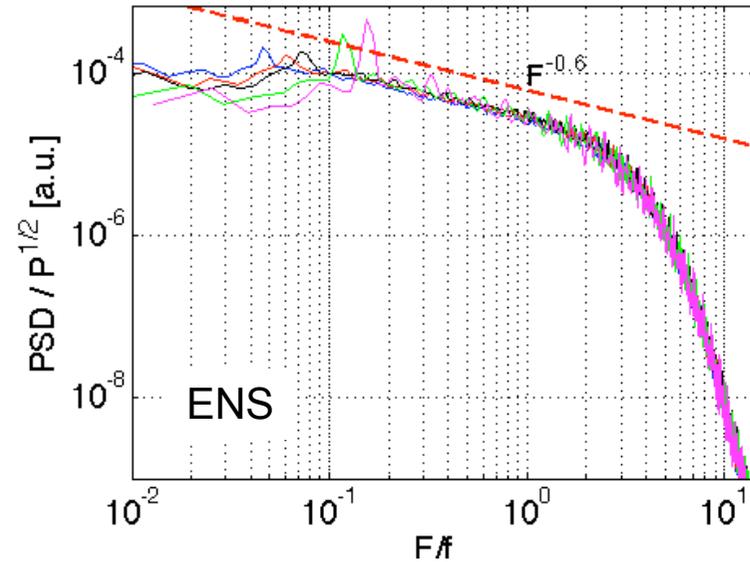
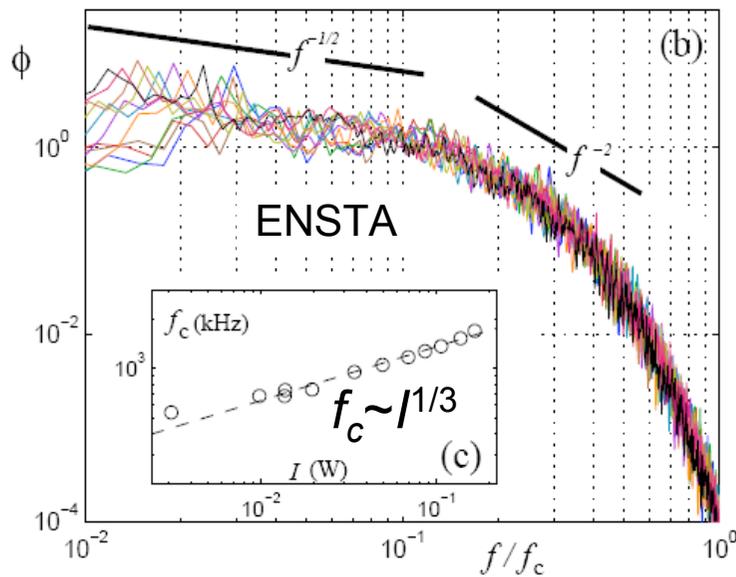


analyse dimensionnelle

$$\omega^* \sim P^{1/3} / h$$

spectre de vitesse scaling en P

$$P_v(f) = (I/I_0)^{1/2} \phi(f/f_c), \quad f_c \propto f_i(I/I_0)^\alpha$$



$$P_v(f) \sim I^{1/2+\alpha\beta} f^{-\beta}$$

$$= I^{0.66} f^{-0.5}$$

$$E_v(\omega) \sim P^{1/2} \left(\frac{\omega}{P^{1/3}} \right)^{-0.6}$$

$$\sim P^{0.7} \omega^{-0.6}$$

analytique $E_v(\omega) \sim P^{1/3} \omega^0$

➔ interaction à 4 ondes ?

➔ singularités ? (plis, D-cones...)

Terme non linéaire

La non-linéarité d'ordre p implique que $P_v(f)$ évolue comme le flux d'énergie à la puissance $1/p$ (Zakharov *et al.* 1992).

Puisque $\epsilon \sim I$ l'expérience indique plutôt $p \approx 2$ (interaction à 3 ondes)

$$P_v(f) \sim \epsilon^{1/2} f^{-1/2} \quad \begin{array}{l} \text{pas de symétrie} \\ \xi \rightarrow -\xi \end{array}$$

Imperfections géométriques sont connues
pour briser cette symétrie

D. Hui and A. W. Leissa, ASME J. App. Mech. **50**, 750
(1983).

Coupure $f_c \sim \epsilon^{\frac{1}{3}}$

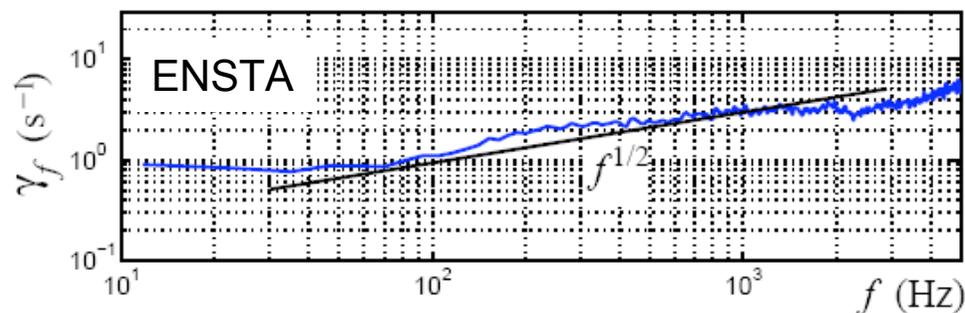
Effet d'amortissement (pertes internes) ?

Le spectre de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}(f) \propto P_v(f) \sim \epsilon^{1/2} f^{-1/2}$

Puissance dissipée : $\int^{k_c} \gamma(k) \mathcal{E}(k) dk \propto \int^{f_c} \gamma(f) \mathcal{E}(f) \sqrt{hc/f} df$

Puissance injectée : ϵ

si $\gamma(f) \sim f^\delta$ l'égalité des deux flux entraîne : $f_c \sim \epsilon^{1/2\delta}$

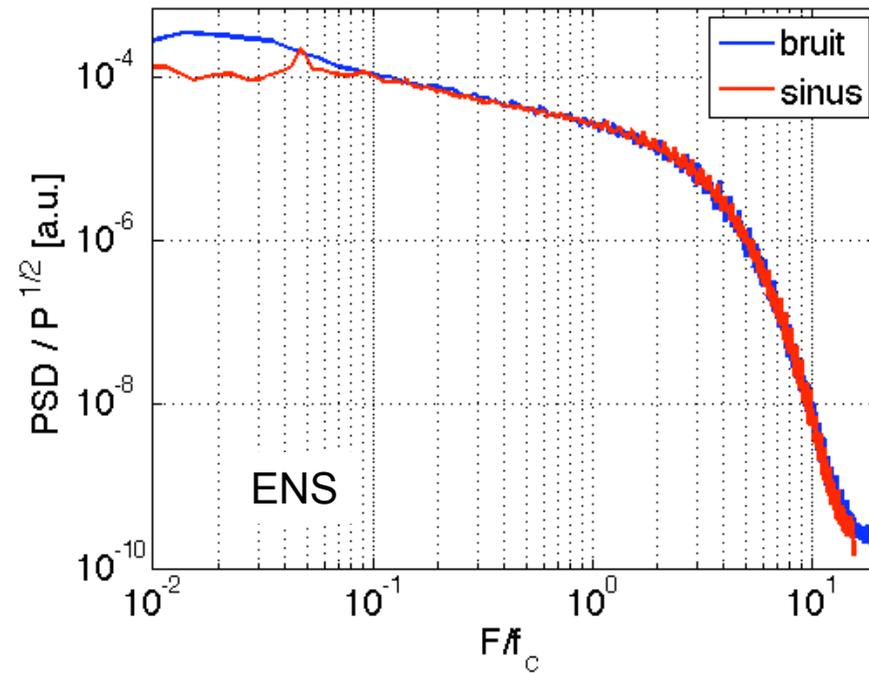


$$f_c \sim \epsilon \sim I$$

beaucoup trop faible

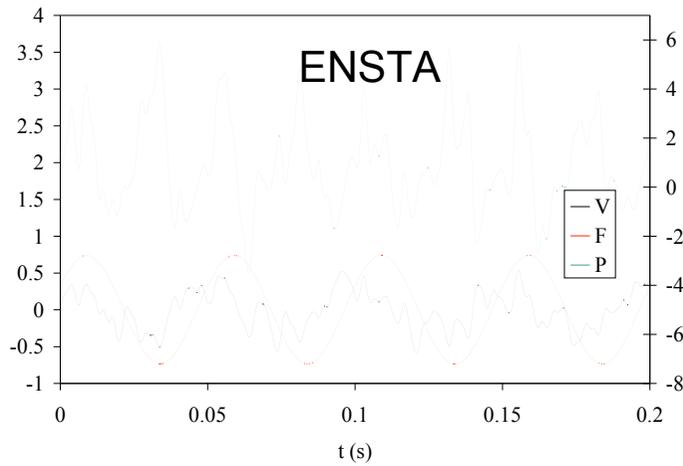
Comparaison forçage sinus / bruit

forçage sinusoidal 30 Hz
ou bruit basse fréquence (<15 Hz)

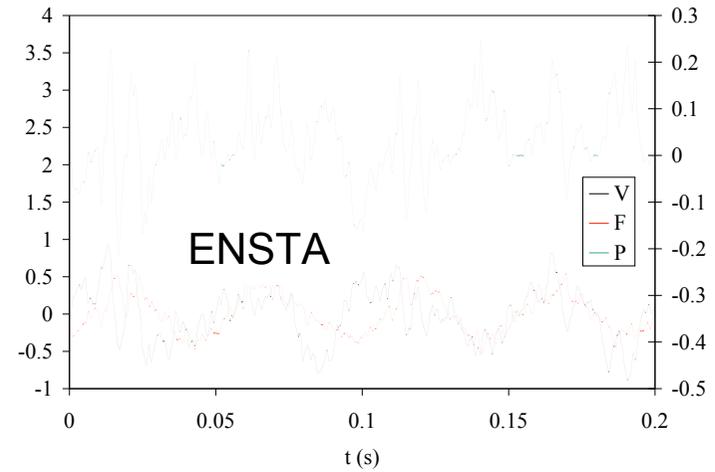


Differents forcages : pot et bobine aimant

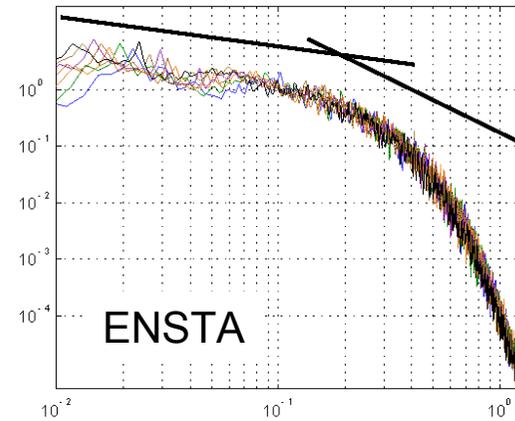
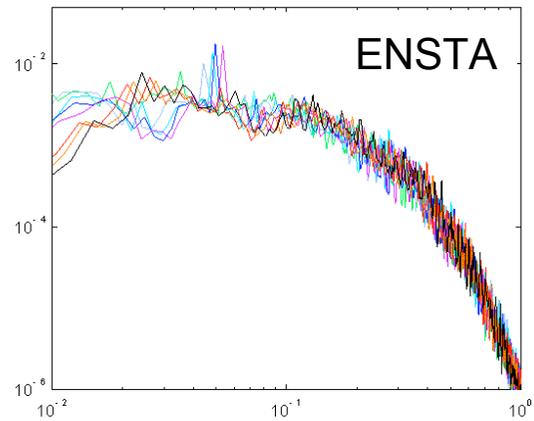
forçage sinusoidal 20 Hz



Bobine-aimant



Pot vibrant

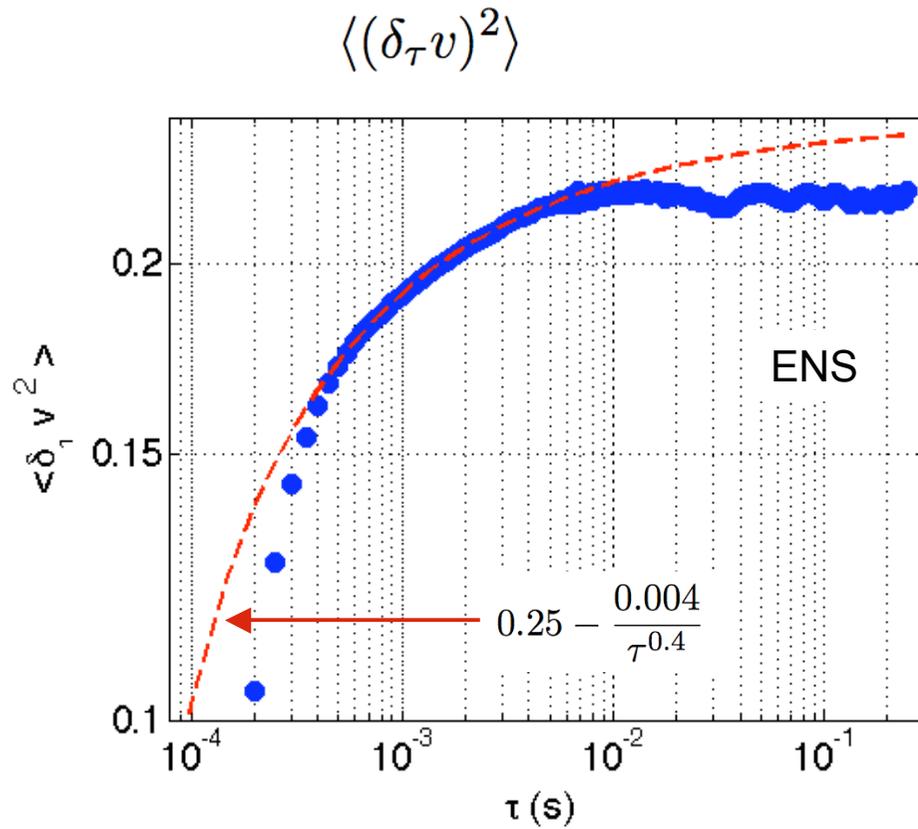


intermittence ?

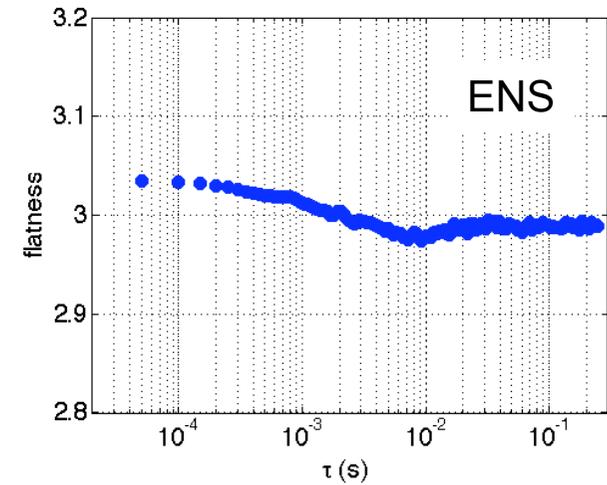
mesure temporelle

$$\frac{\langle (\delta_\tau v)^p \rangle}{\langle (\delta_\tau v)^2 \rangle^{p/2}}$$

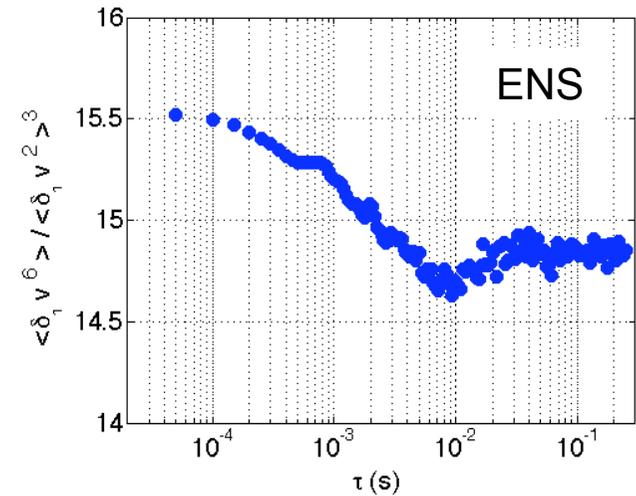
$$\delta_\tau v = v(t + \tau) - v(t)$$



ordre 4



ordre 6



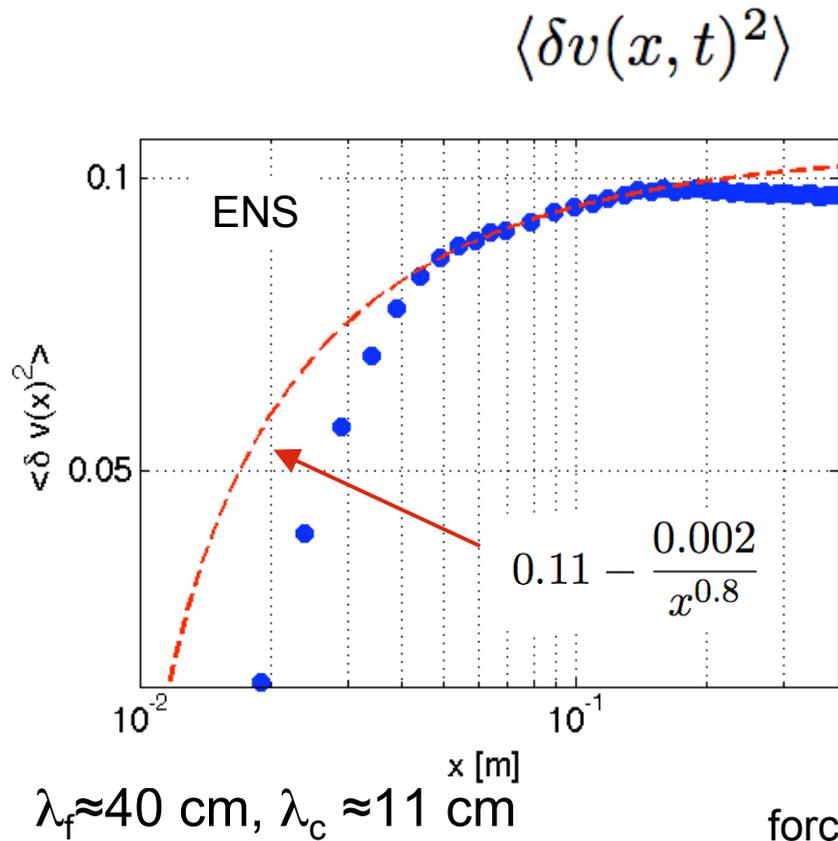
$\lambda_f \approx 40$ cm, $\lambda_c \approx 11$ cm

forçage sinusoidal

intermittence ?

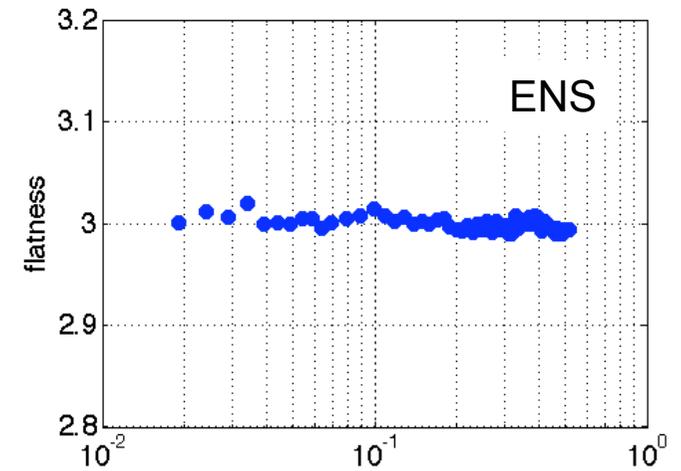
mesure spatiale $\frac{\langle \delta v(x, t)^p \rangle_t}{\langle \delta v(x, t)^2 \rangle_t^{p/2}}$

$$\delta v(x, t) = v(x, t) - v(0, t)$$

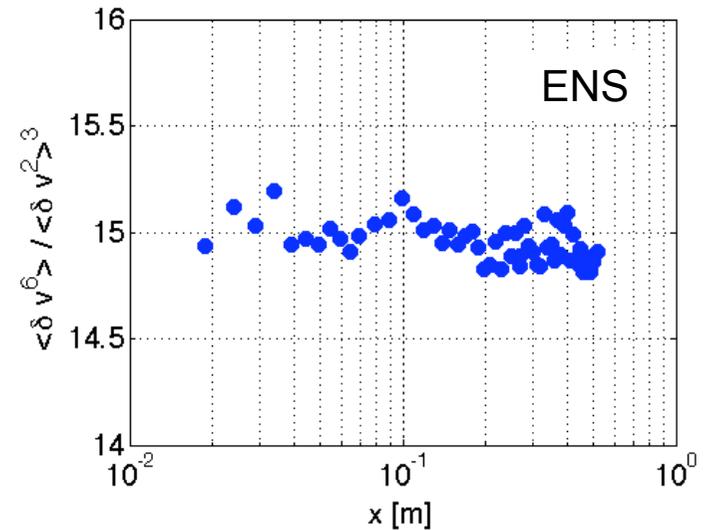


forçage sinusoidal

ordre 4



ordre 6

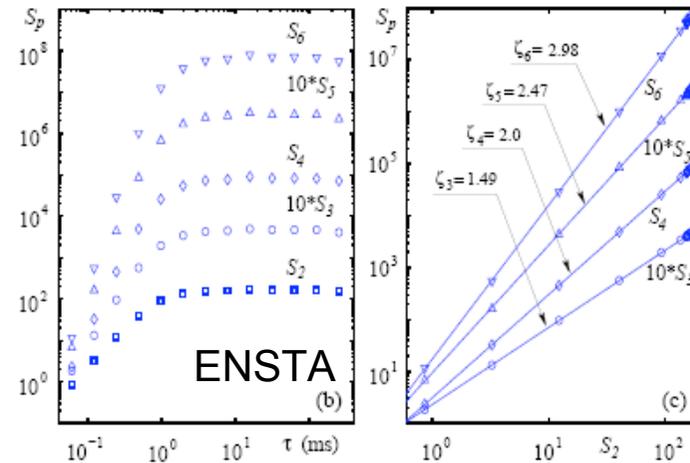
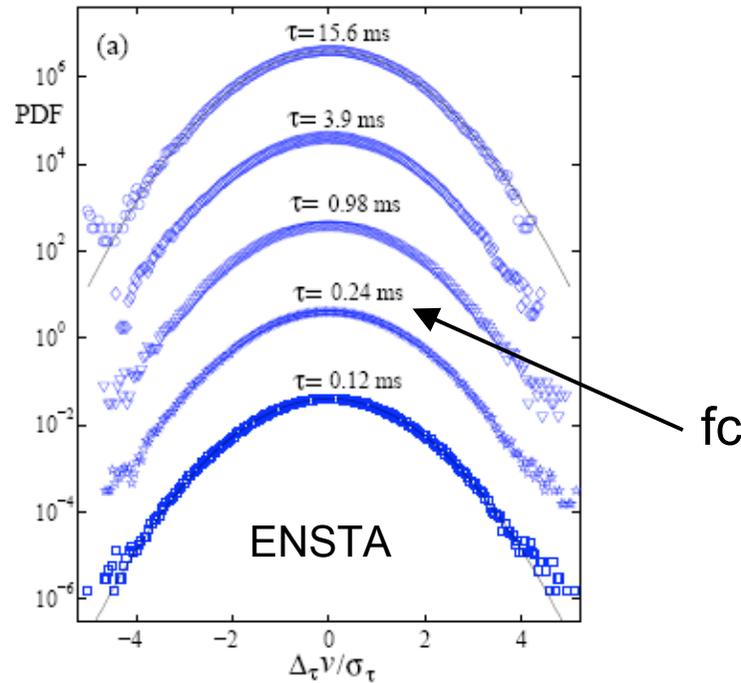


intermittence ?

mesure temporelle

$$\Delta_\tau v = v(t + \tau) - v(t)$$

$$S_p(\tau) = \langle |\Delta_\tau v|^p \rangle$$



(ESS) : $S_p(\tau) \propto S_2(\tau)^{\zeta_p}$

$$\zeta_p = \frac{p}{2}$$

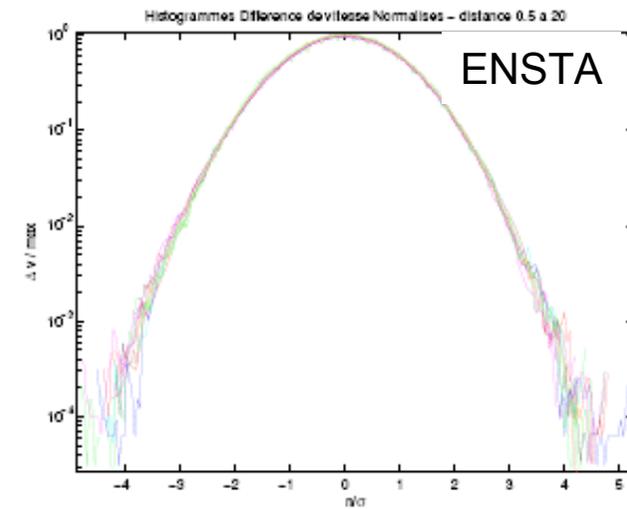
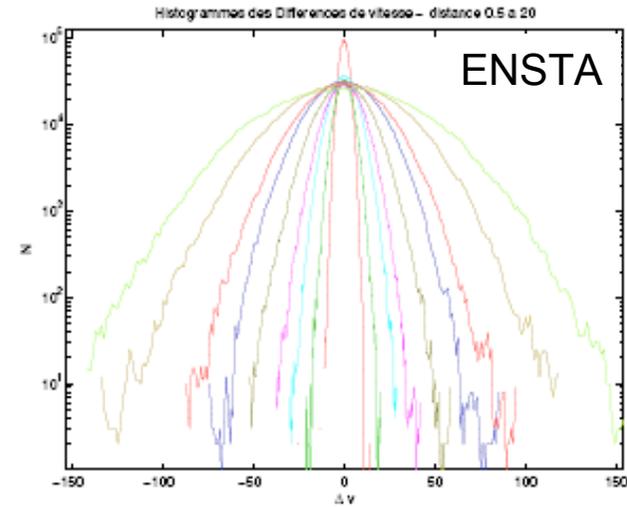
⇒ pas d'exposants anormaux

Fréquences (en Hz)	[20,100]	[100,500]	[500,1500]
Nombre d'onde (en m ⁻¹)	[16,35]	[35,80]	[80,140]
Longueur d'onde (en cm)	[40,18]	[18,8]	[8,0.5]

intermittence ?

mesure spatiale

$$\Delta_{\perp} v(r) = v_{\perp}(x) - v_{\perp}(x + r).$$

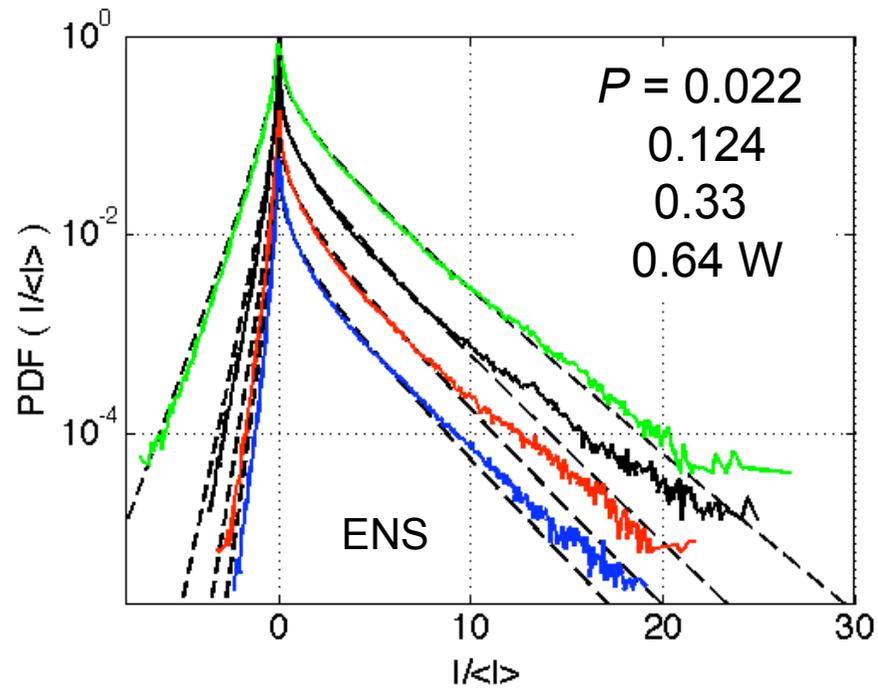


Fréquences (en Hz)	[20,100]	[100,500]	[500,1500]
Nombre d'onde (en m ⁻¹)	[16,35]	[35,80]	[80,140]
Longueur d'onde (en cm)	[40,18]	[18,8]	[8,0.5]

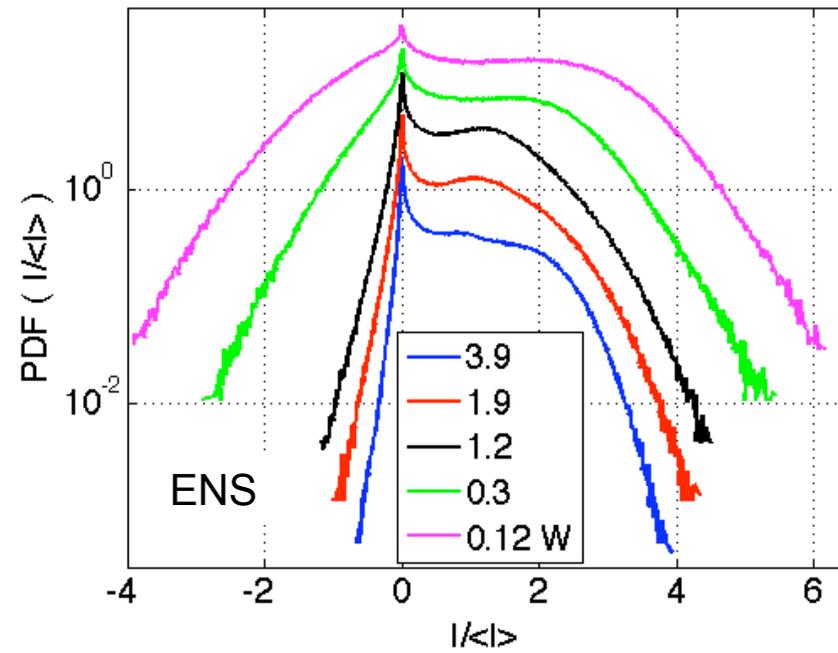
puissance injectée

mesure: vitesse du vibreur + force appliquée

forçage bruit



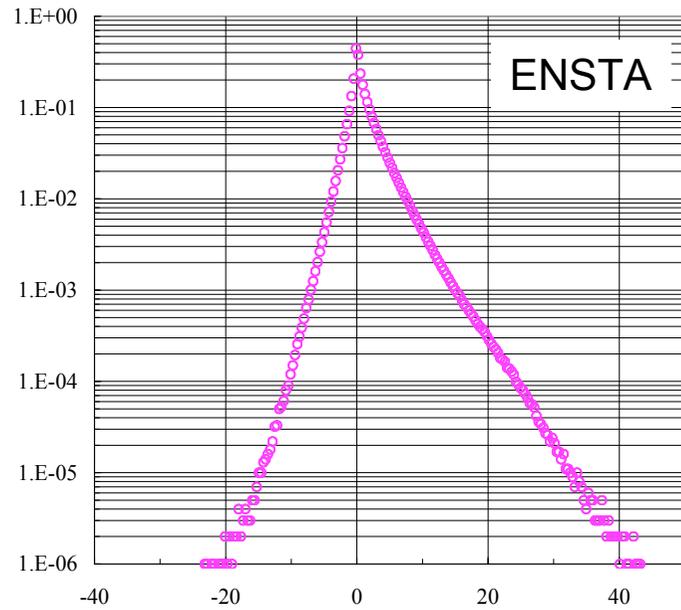
forçage sinus



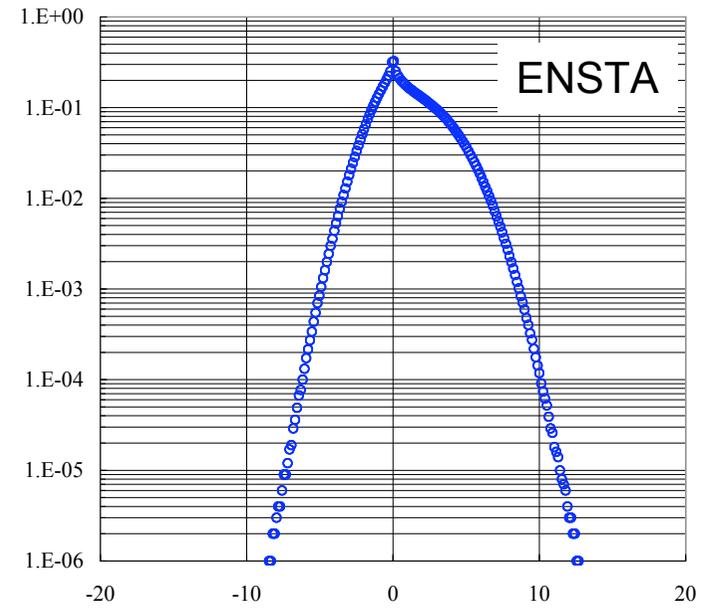
puissance injectée

Système bobine aimant

forçage bruit (blanc sur 10-30 Hz)



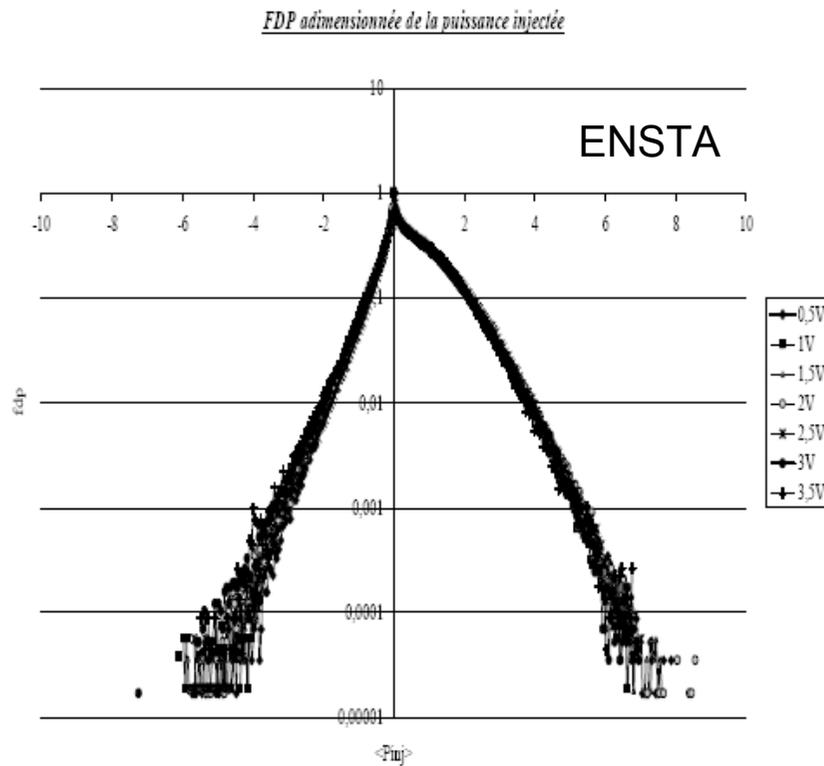
forçage sinus (20Hz)



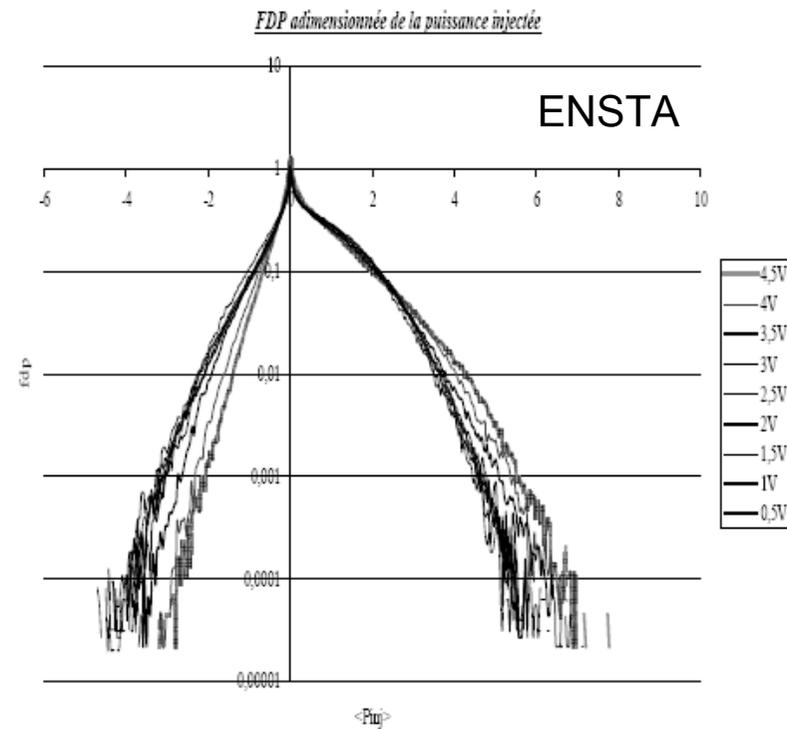
puissance injectée

Comparaison bobine aimant/ pot vibrant

Pot vibrant (Tension sinus)



Bobine (Force sinus)



ondes ou singularités ?

hyp: $\delta v(x, t) = v(x, t) - v(0, t)$ superposition d'ondes sinusoidales

$$\delta v(x, \omega) = e^{-i\omega t} \int A(\theta, \omega) (e^{ik \cos \theta x} - 1) k d\theta$$

$$\langle |\delta v(x, \omega)|^2 \rangle = \left\langle \left| \int A(\theta, \omega) (e^{ik \cos \theta x} - 1) k d\theta \right|^2 \right\rangle$$

hyp: isotropie et pas de corrélation à 2 ondes

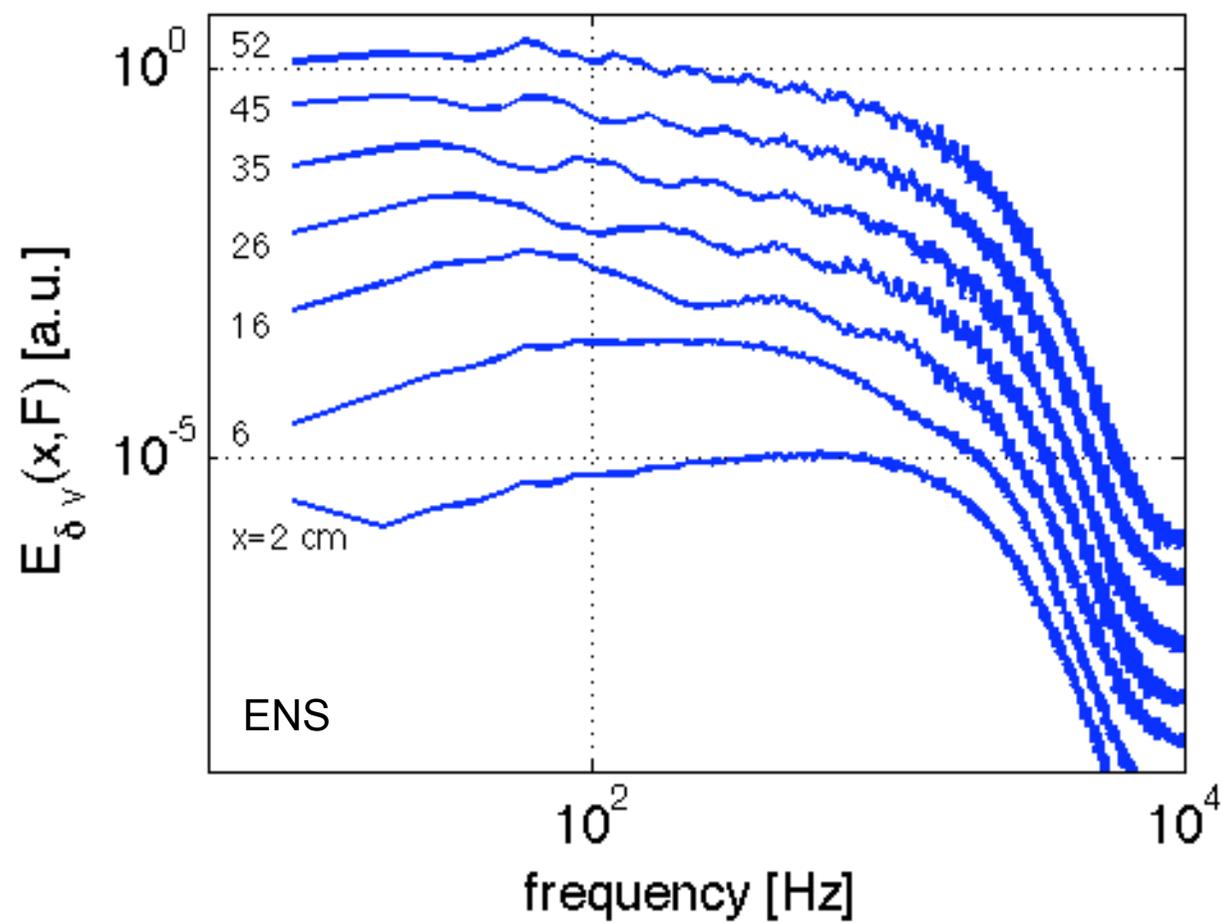
$$\langle A(\theta, \omega) A^*(\theta', \omega) \rangle = \langle |A(\omega)|^2 \rangle \delta(\theta - \theta')$$

$$\langle |\delta v(x, \omega)|^2 \rangle = 4\pi k^2 \langle |A(\omega)|^2 \rangle (1 - J_0(kx))$$

spectres:

$$E_{\delta v}(x, \omega) = 2E_v(\omega) (1 - J_0(kx))$$

ondes ou singularités ?



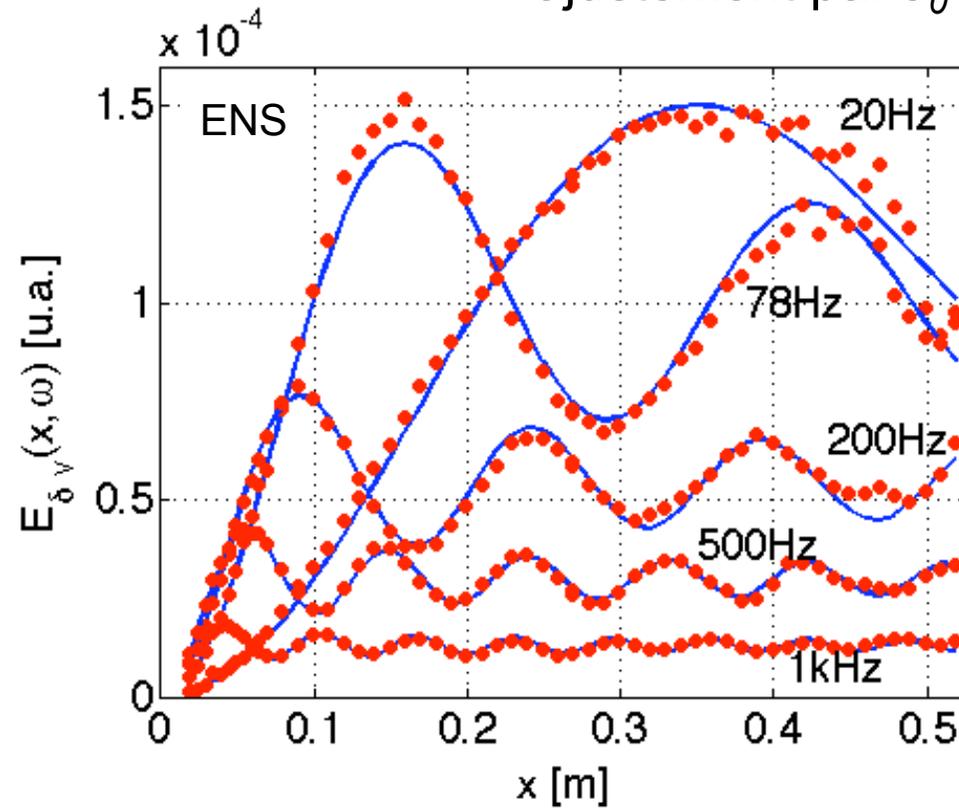
ondes ou singularités ?

$$E_{\delta v}(x, \omega) = 2E_v(\omega)(1 - J_0(kx))$$

amplitude

dilatation

ajustement par J_0



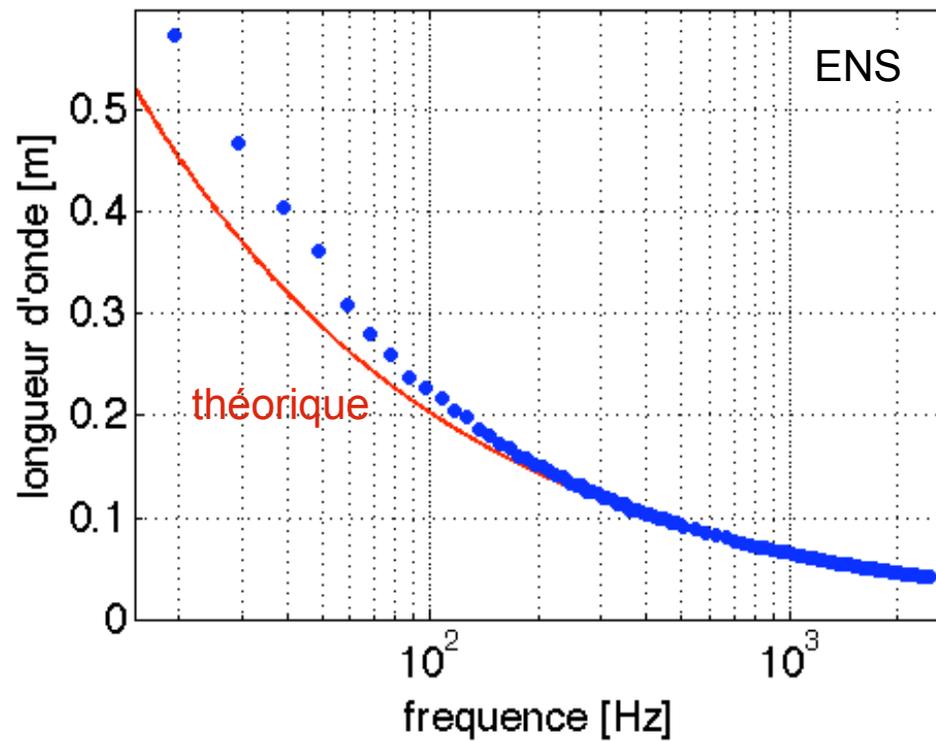
ondes ou singularités ?

$$E_{\delta v}(x, \omega) = 2E_v(\omega)(1 - J_0(kx))$$

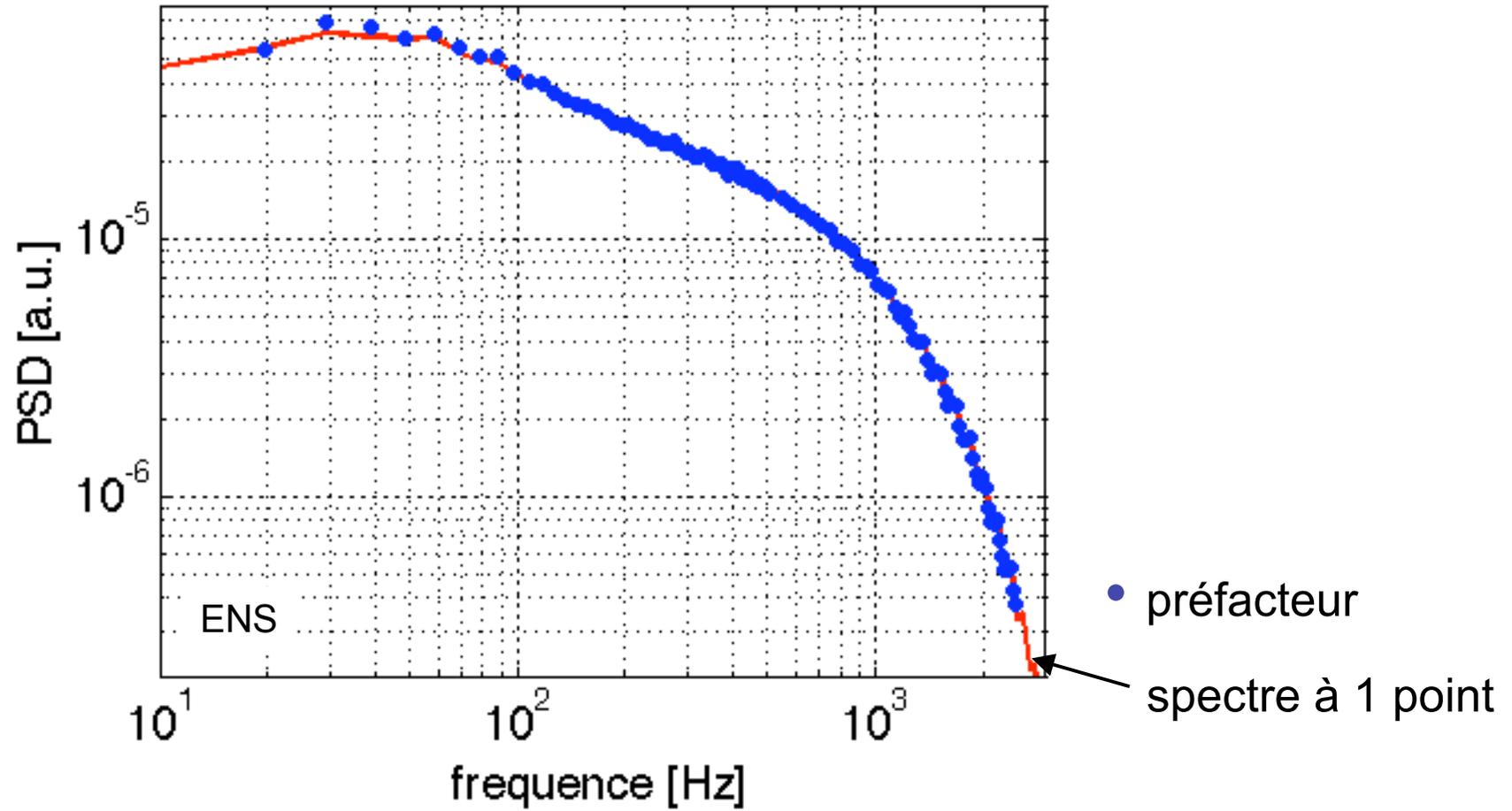
amplitude

ajustement par J_0

dilatation



ondes ou singularités ?

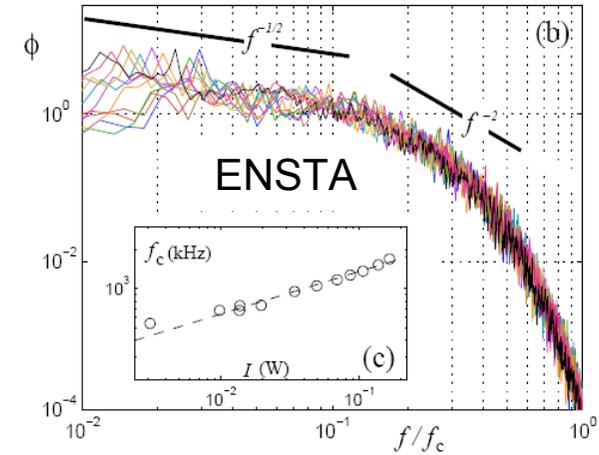


pas de trace des singularités

Production de singularité ?

Discontinuités de pente aléatoires (Kuznetsov 2004) :

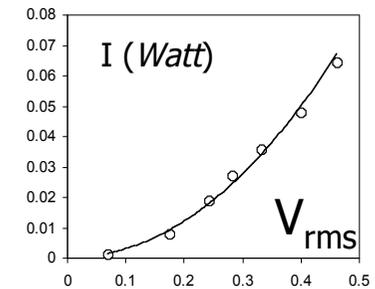
$$P_v(f) \propto \nu_s \Gamma^2 f^{-2}$$



Saut de vitesse *rms* : $\Gamma \sim v_{\text{rms}} \sim I^{1/2} \sim \epsilon^{1/2}$

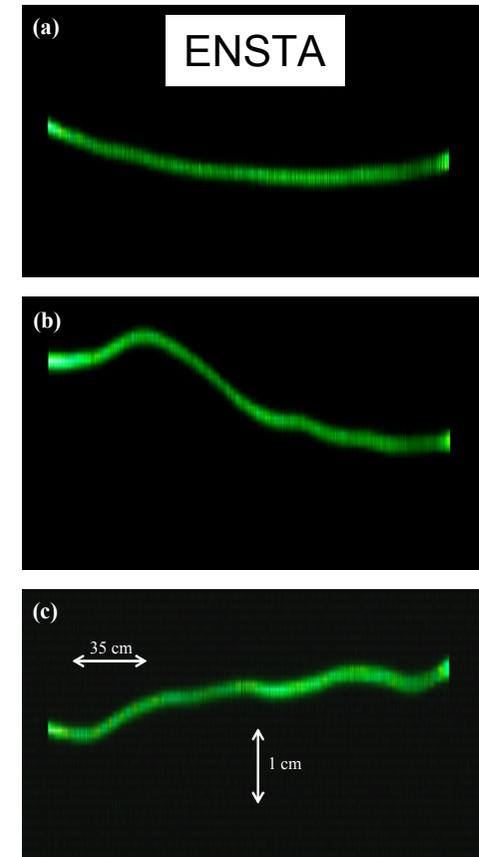
Les spectres coïncident à f_c : $\epsilon^{1/2} f^{-1/2} \sim \epsilon f^{-2}$

$$f_c \sim \epsilon^{1/3}$$



Conclusion et perspectives ENSTA

- Observation d'un spectre large bande
- Résultats suggèrent :
 - non-linéarité à 3 ondes (quadratique)
 - spectre de singularité pour la dissipation.
- Perspectives : observation des déformations



ondes ou singularités cas du mercure, ondes de surface (mesures C. Laroche)

