Description Eulerienne-Lagrangienne des équations de Navier-Stokes

Carlos Cartes

Miguel Bustamante

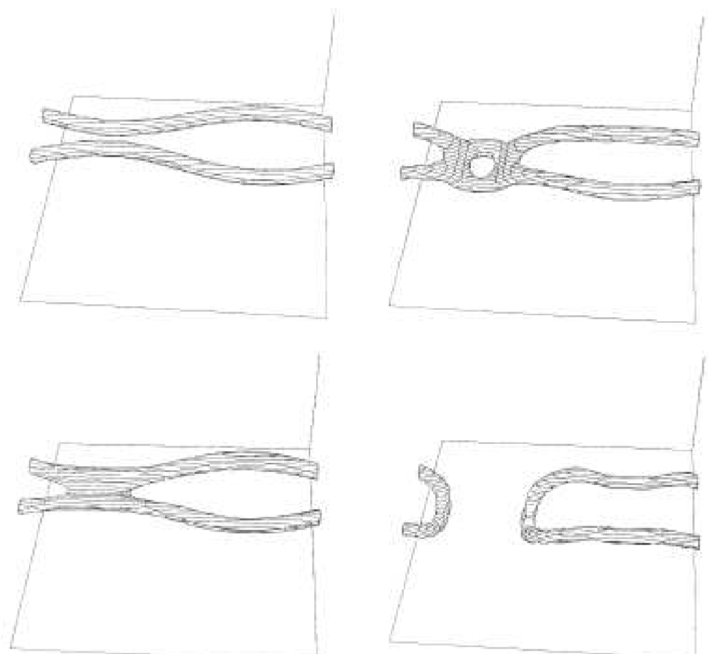
Marc-E. Brachet.

Laboratoire de Physique Statistique

École Normale Supérieure de Paris

Introduction

Nous réalisons une généralisation de la formulation de Constantin pour capturer la dynamique des équations de Navier-Stokes en faisant une extension de la représentation de Weber-Clebsch à partir d'Euler vers Navier-Stokes. Le but de cette extension est de capturer le phénomène de la reconnexion de vortex.



Clebsh et Weber-Clebsch

Dans la représentation classique de la dynamique des équations de Euler la vitesse est écrite de façon non-linéaire à partir de q paires de potentiels

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{q} \lambda^i \nabla \mu^i - \nabla \phi.$$

La formulation en termes de variables de Clebsch consiste en une seule couple de champs pourtant la vitesse à représenter a une helicité moyenne nulle. Par contre la formulation de Weber-Clebsch consiste en trois pairs avec le quels il n'a plus de limitations pour l'écoulement.

Données initiales

Champs périodiques dans l'espace peuvent être générés pour cette formulation a partir de

$$\mu^i = x^i + \mu_p^i$$

et si on assume que μ_p^i et les autres champs ϕ et λ^i sont périodiques. Pour initialiser les champs nous supposons que quand $t = 0$

$$\begin{aligned} \mu_p^i &= 0 \\ \lambda^i &= u^i \\ \phi &= 0 \end{aligned}$$

Équations du mouvement

Pour obtenir les équations du mouvement que reproduisent la dynamique de Navier-Stokes, on applique D_t sur la définition de la transformation de Weber-Clebsch

$$
\begin{aligned}
D_t\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^{q}\left(D_t\lambda^i\nabla\mu^i - D_t\mu^i\nabla\lambda^i\right) \\
&- \nabla\left(D_t\phi + \frac{1}{2}|u|^2 - \sum_{i=1}^{q} D_t\mu^i\lambda^i\right)
\end{aligned}
$$

qui doit être l'équivalent a

$$D_t\mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{f} = \nu\triangle\mathbf{u}.$$

Équations du mouvement

Alors introduisons les termes générales

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= L^i [\lambda, \mu] \\ D_t \mu^i &= M^i [\lambda, \mu] \end{aligned}$$

et on fait l'identification

$$\sum_{i=1}^{q} \left(L^i \nabla \mu^i - M^i \nabla \lambda^i \right) = \mathbf{f} - \nabla G.$$

Cet est un système de d équations linéaires pour les $2q$ inconnues L^i et M^i.

Si on fait $\nu = \mathbf{f} = G = L^i = M^i = 0$ nous obtenons les équations d'Euler.

Équations du mouvement

Donc la dynamique de Navier-Stokes se obtient quand les potentiels obéissent un système d'équations d'advection modifies.
Finalement nous changeons le coté droite des équations, pour obtenir équations similaires a la diffusion

$$\begin{aligned} D_t\lambda^i &= \nu\triangle\lambda^i + \widetilde{L}^i\left[\lambda,\mu\right] \\ D_t\mu^i &= \nu\triangle\mu^i + \widetilde{M}^i\left[\lambda,\mu\right] \end{aligned}$$

Équations du mouvement

et le système

$$\sum_{i=1}^{q}\left(\widetilde{L}^i \nabla \mu^i - \widetilde{M}^i \nabla \lambda^i\right) = \widetilde{\mathbf{f}} - \nabla \widetilde{G},$$

$$\widetilde{\mathbf{f}} = 2\nu \sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha \lambda^i \partial_\alpha \nabla \mu^i.$$

Solution de Moore-Penrose

Pour obtenir les termes $\widetilde{L}^i$ et $\widetilde{M}^i$ nous résoudrons le système linéaire de d équations et $2q$ inconnues, comme $2d > q$ nous utiliserons la pseudo inverse de Moore-Penrose, en ajoutons la restriction de que la norme

$$\sum_{i=1}^{q} \left(\widetilde{L}^i \widetilde{L}^i + \tau^{-2} \widetilde{M}^i \widetilde{M}^i \right)$$

soit la plut petite possible. Aussi il faut introduire le paramètre τ avec les dimensions du temps.

Solution de Moore-Penrose

La solution avec la restriction de Moore-Penrose peut être écrit

$$
\begin{aligned}
D_t \lambda^i &= \nu \triangle \lambda^i + \nabla \mu^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{f}} - \nabla \widetilde{G} \right) \\
D_t \mu^i &= \nu \triangle \mu^i - \tau^2 \, \nabla \lambda^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{f}} - \nabla \widetilde{G} \right)
\end{aligned}
$$

Ou le produit scalaire indique une multiplication matriciel ou vectoriel et la matrice symétrique de $d \times d$ dimensions $\mathbb{H}$

$$
\mathbb{H}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^{q} \left(\tau^2 \, \partial_\alpha \lambda^i \partial_\beta \lambda^i + \partial_\alpha \mu^i \partial_\beta \mu^i \right) \, .
$$

Solution de Ohkitani-Constantin

La méthode utilisé consiste en fixer le terme $\widetilde{M}^i = 0$ et on obtiens le système

$$\begin{aligned} \frac{D\lambda^i}{Dt} &= \nu \triangle \lambda^i + \widetilde{L}^i[\lambda, \mu] \\ \frac{D\mu^i}{Dt} &= \nu \triangle \mu^i \, , \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{d} \widetilde{L}^i \, \nabla \mu^i = 2\nu \sum_{i=1}^{d} \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha \lambda^i \partial_\alpha \nabla \mu^i \, .$$

Limite Singulier

Pour la forme de la matrice symétrique $\mathbb{H}$ on peut voir que le système général de Moore-Penrose deviens le système de Ohkitani-Constantin quand $\tau = 0$ ($q = d = 3$ $G = 0$). Mais nous aurons problèmes avec ça formulation quand

$$\text{det}\left(\nabla\mu\right) = 0$$

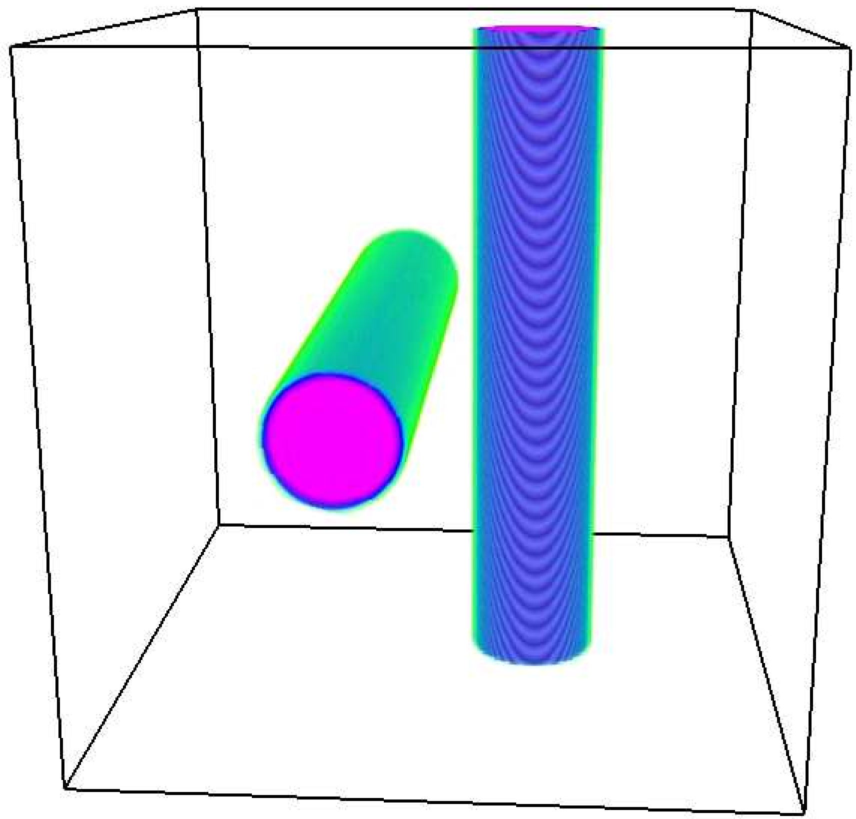
Donc pour continuer avec les calculs on doit faire un

resetting, ça veut dire retourner aux *conditions initiales*

$$\begin{aligned} \lambda &\longrightarrow \mathbf{u}(t_0) \\ \mu_p &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Implémentation Numérique

L'étude numérique de la formulation sera réalisé avec la condition initiale de Boratav-Pelz-Zabusky



Dynamique des Vortex

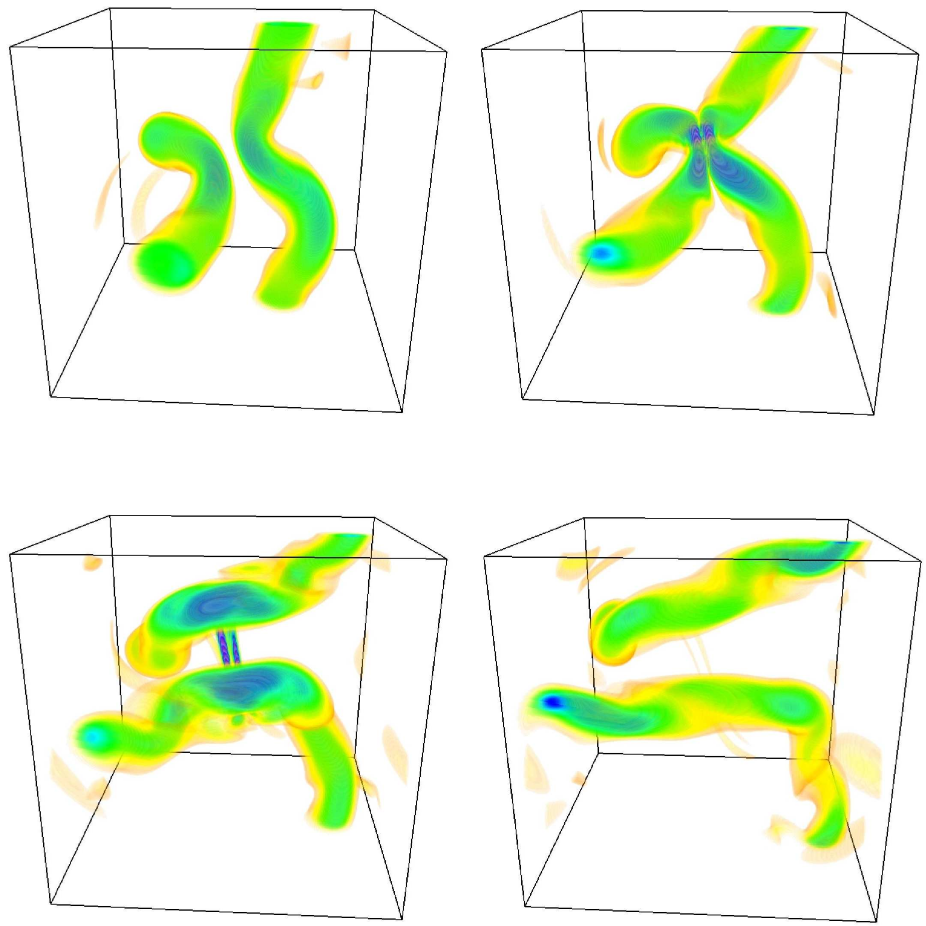


Figure 1: Évolution temporelle de ω^2 avec $\tau = 0.01$ pour les temps 3.0, 4.2, 5.4 et 6.6.

Résultats Numériques

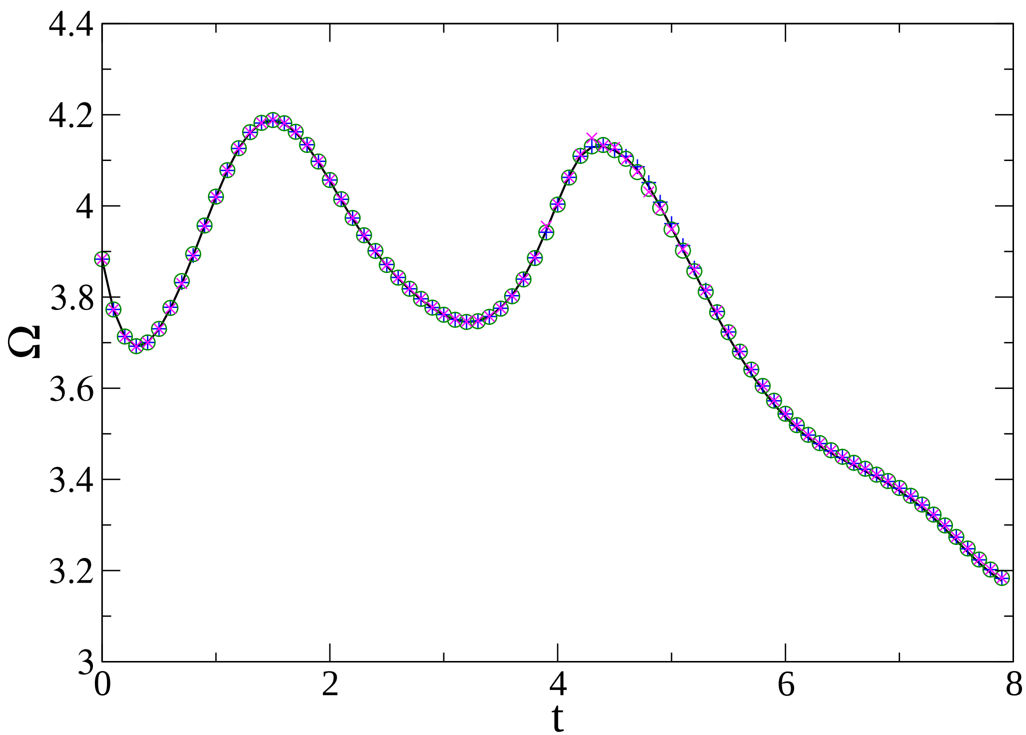


Figure 2: Évolution temporelle de l'enstrophie Ω pour un nombre de Reynolds de $R = 1044$ avec $\tau = 0$, 0.01 et 0.1 ($+$, $\circ$ et $\times$).

Résultats Numériques

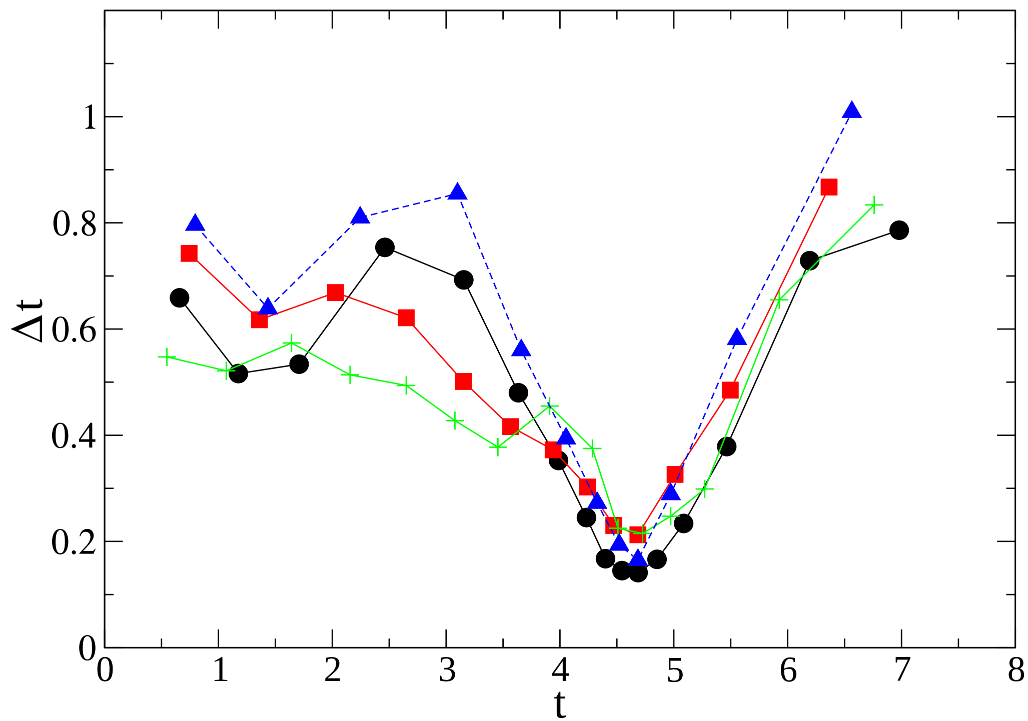


Figure 3: Évolution temporelle de Δt pour $\tau = 0$, 0.01 et 0.1 ($\circ$, $\square$ et $+$), les triangles correspondent à la simulation effectué par Ohkitani-Constantin.

Résultats Numériques

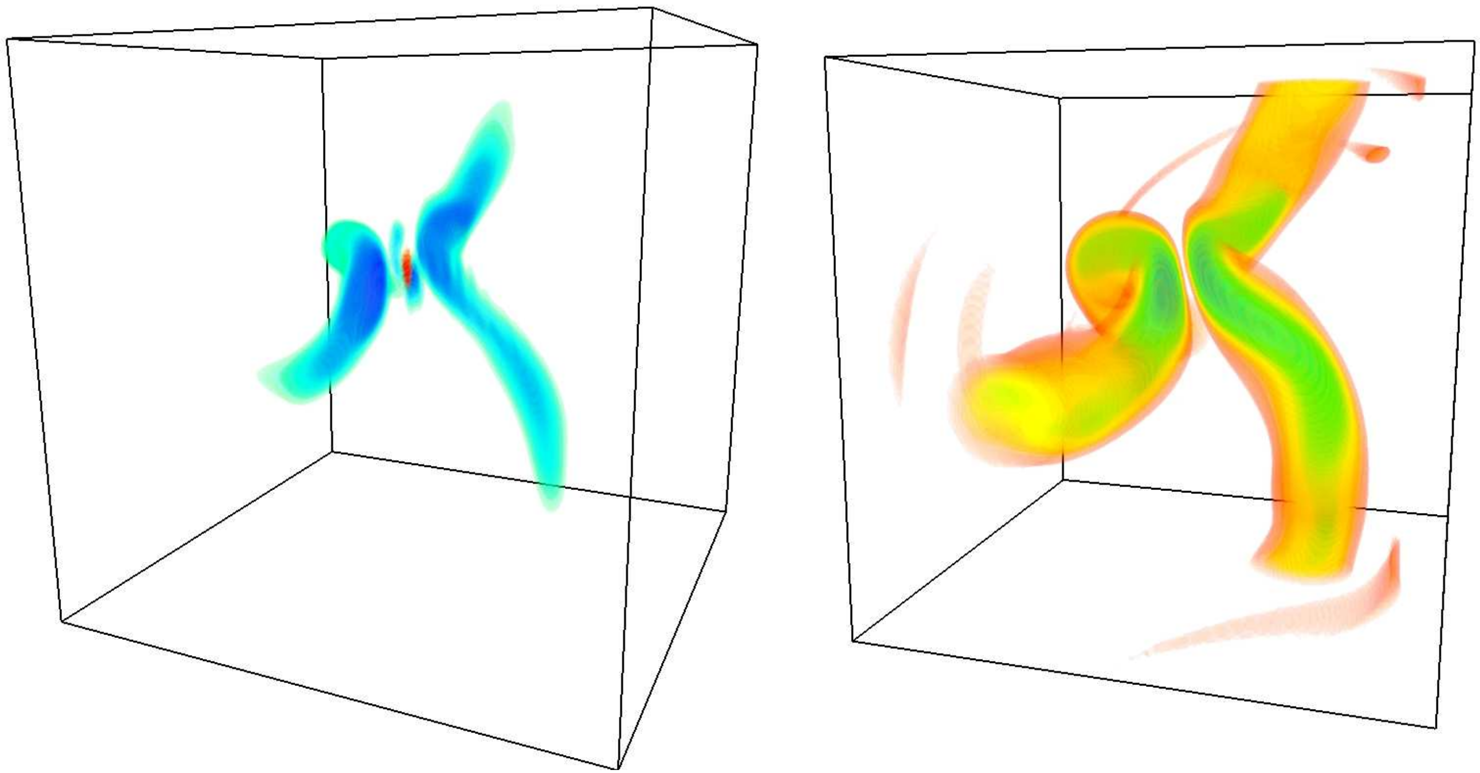


Figure 4: Minima (rouge) et maxima (bleu) de det($\mathbb{H}$) (gauche) et du carré de la vorticité (droite).

Conclusions

- La formulation de Ohkitani-Constantin est un cas particulier des équations du mouvement générales quand $\tau \to 0$.
- Formulation de Moore-Penrose n'a pas besoin de resetting a Reynolds bas, mais ils permettent faire simulations numériques a Reynolds plus haut.
- L'intervalle entre les resettings croît de façon brusque quand τ est varié a partir de 0 a un valeur beaucoup plus petit que $\triangle t$.