

Fluctuations du flux d'énergie en turbulence d'ondes et dans d'autres systèmes dissipatifs hors de l'équilibre

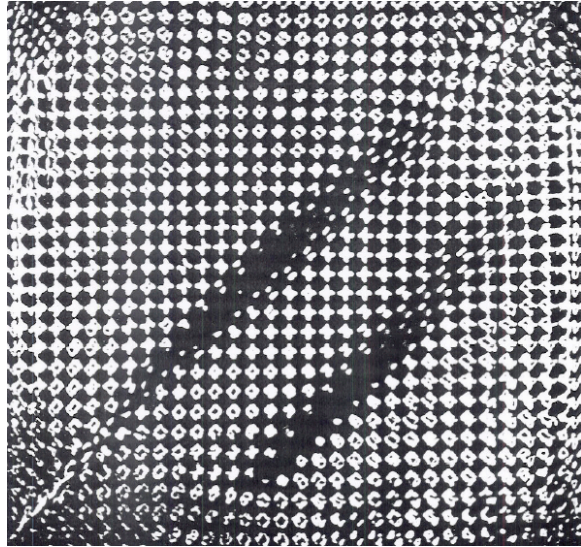
**Stéphan Fauve
LPS - ENS, Paris**

GDR Turbulence, Lyon 31 mars 2008

Quelles sont les propriétés statistiques du flux d'énergie nécessaire à maintenir un système dissipatif dans un régime stationnaire ?

- **Faraday waves:** S. Ciliberto, S. Douady and S. Fauve, EPL (1991).
- **Turbulence:** R. Labbé, J. F. Pinton and S. Fauve, J. Physique II (1996).
- **Turbulent convection:** S. Aumaître and S. Fauve, EPL (2003).
- **Granular gases:** S. Aumaître, S. Fauve, S. McNamara and P. Poggi, EPJB (2001). S. Aumaître, J. Farago, S. Fauve and S. McNamara, EPJB (2004). S. Aumaître, A. Alastuey and S. Fauve, EPJB, (2006).
- **Wave turbulence:** E. Falcon, S. Aumaître, C. Falcon, C. Laroche and S. Fauve, PRL (2008)

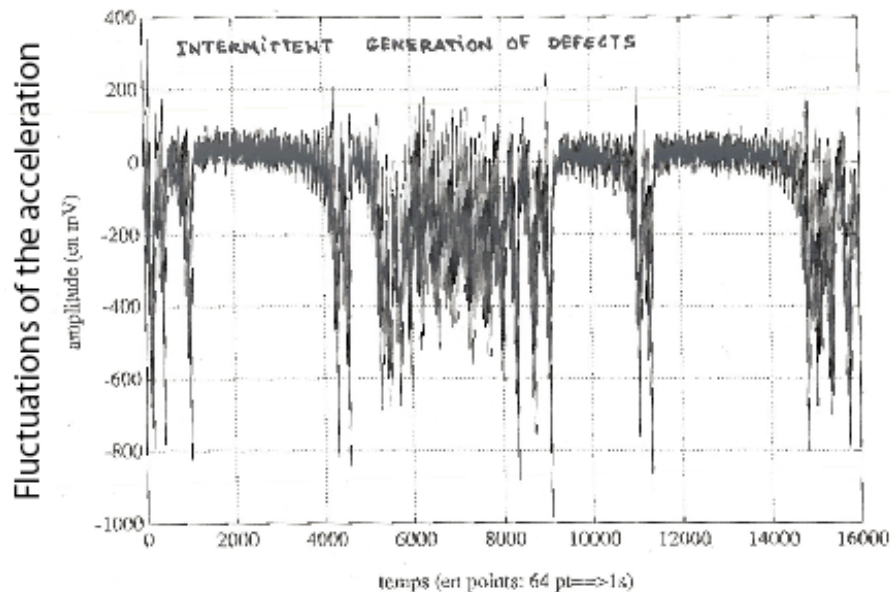
Ondes de Faraday : fluctuations de l'accélération due à la génération intermittente de défauts



$$E = \frac{1}{2} \int_V v^2 dV + g \int_V z dV + \gamma S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dg}{dt} \int_V z dV - \nu \int_V \Omega^2 dV - \nu \int_S (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$g = g_0 + A \cos(2\omega t) + \delta g(t)$$



Fluctuations du flux d'énergie de l'injection à la dissipation

S. Ciliberto, S. Douady and S. Fauve,
Europhys. Lett. 15, 23-28 (1991)
(Fig. P. Abry)

Flux d'énergie: $\frac{dE}{dt} = I - D$

Example :
Turbulence hydrodynamique

$$E = \frac{1}{2}\rho \int_V v^2 dV,$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \rho\nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

$$I = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV,$$

$I > 0$ ou $I < 0$ alors que $D > 0$

$$D = \rho\nu \int_V \omega^2 dV,$$

Dissipative systems

- Fluid turbulence (Navier-Stokes equation): viscosity
- Granular gases: inelastic collisions

No thermostat, no ad-hoc dissipation for energy conservation

A simple example: a RC circuit driven by a random voltage

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\gamma V(t) + \xi(t) + f_0$$

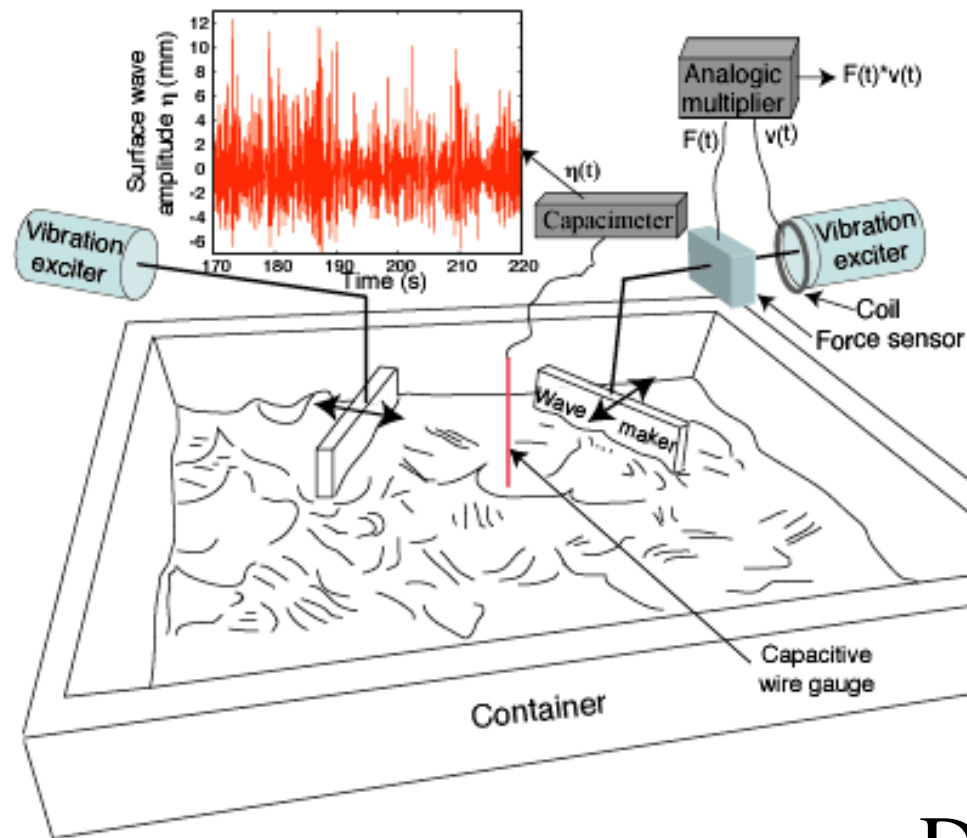
(i) $\xi(t)$ and γ : heat bath \Rightarrow fluctuation dissipation relation

f_0 : external operator \Rightarrow drives the system slightly out of equilibrium

(ii) γ macroscopic damping (fluctuations can be neglected)

$f_0 \neq 0$, $\xi(t)$: external operator \Rightarrow drives the system strongly out of equilibrium

Ondes de gravité-capillarité



$$M\dot{V} = F(t) + F_R(t)$$

$$I(t) = -F_R(t)V(t)$$

$$I > 0 \text{ or } < 0$$

$$D > 0$$

Dissipation visqueuse

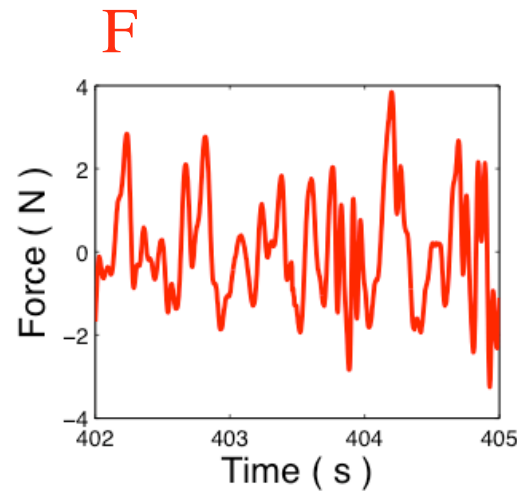
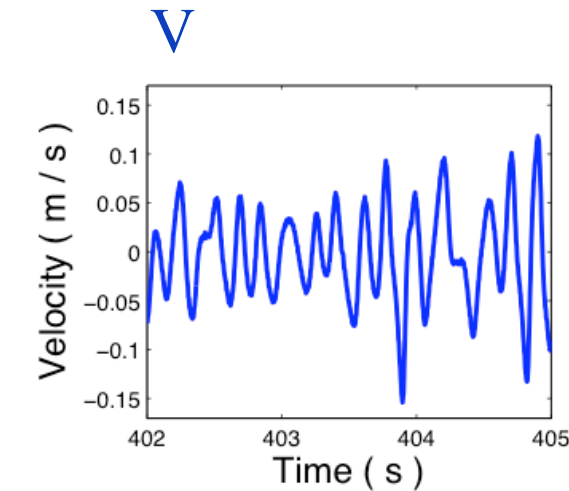
Turbulence d'ondes

- Interactions non linéaires faibles entre vecteurs d'ondes
- Limite continue
- Equations cinétiques pour les amplitudes des ondes à un nombre d'onde ou à une fréquence donnés
- En plus des solutions d'équilibre, il existe des solutions qui correspondent à un flux d'énergie constant dans l'espace des nombres d'onde ou des fréquences (Zakharov et al., 1967)

$$S_{\eta}(f) \propto \epsilon^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/6} f^{-17/6} \quad \text{for capillary waves,}$$

$$S_{\eta}(f) \propto \epsilon^{1/3} g f^{-4} \quad \text{for gravity waves,}$$

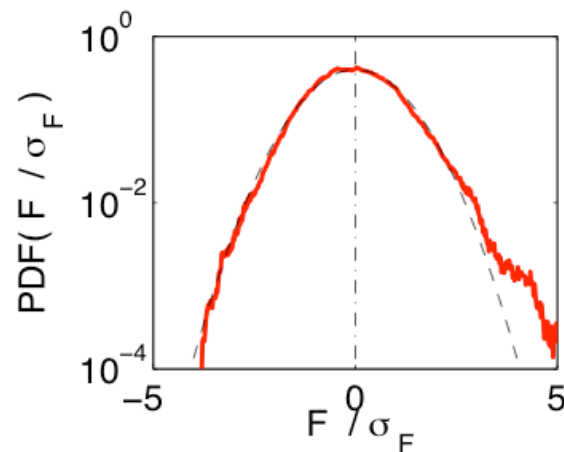
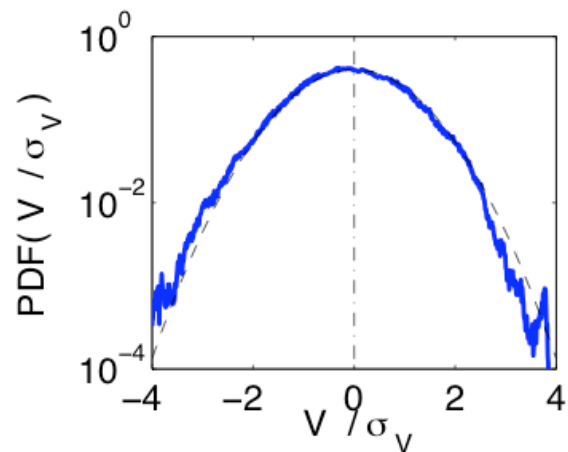
Mesure de la force F appliquée au piston et vitesse V du piston résultant d'une tension aléatoire



$$\sigma_F = K \rho S_P \sigma_V$$

$$\langle I \rangle = c \rho S_P \sigma_V^2$$

$$\varepsilon = \langle I \rangle / \rho S_P$$



Avec le mercure:

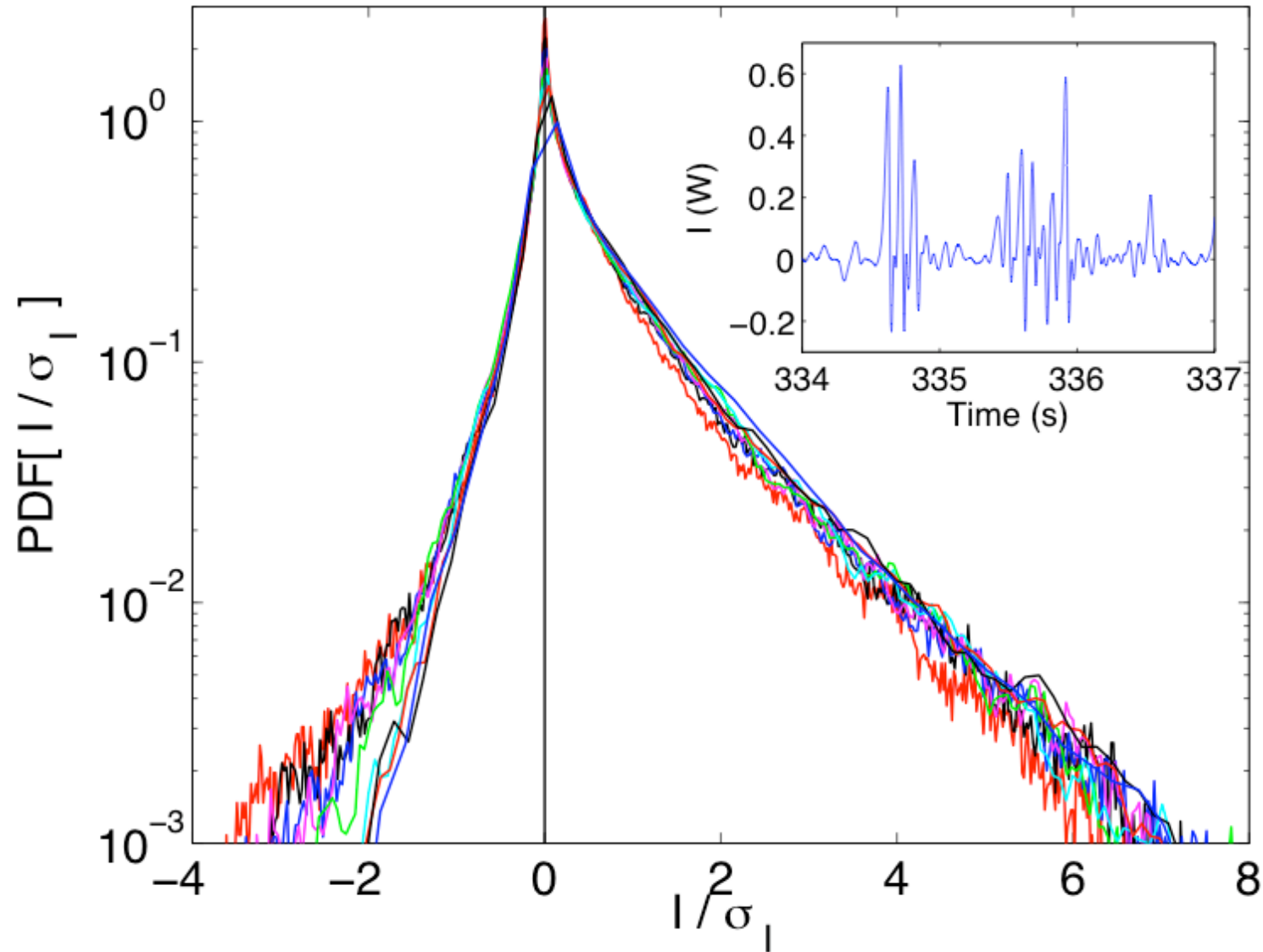
$$\sigma_V \sim 5 \text{ cm/s}$$

$$\sigma_F \sim 1 \text{ N}$$

$$\langle I \rangle \sim 30 \text{ mW}$$

$$\sigma_I \sim 100 \text{ mW}$$

Fluctuations de la puissance injectée $I = F V$



Effet de l'inertie

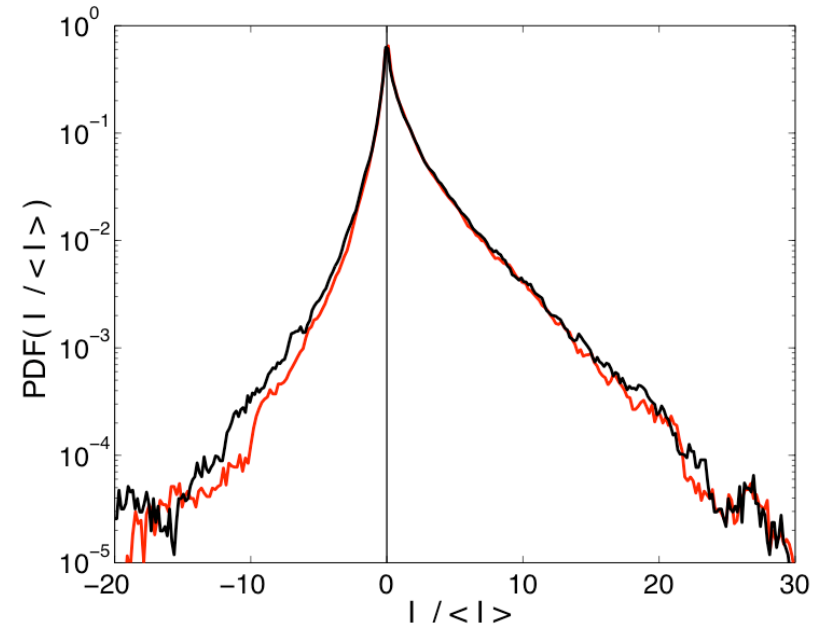
- F appliqué au piston par le vibreur électromécanique
- F_R force appliquée au piston par le fluide

$$M\dot{V} = F(t) + F_R(t)$$

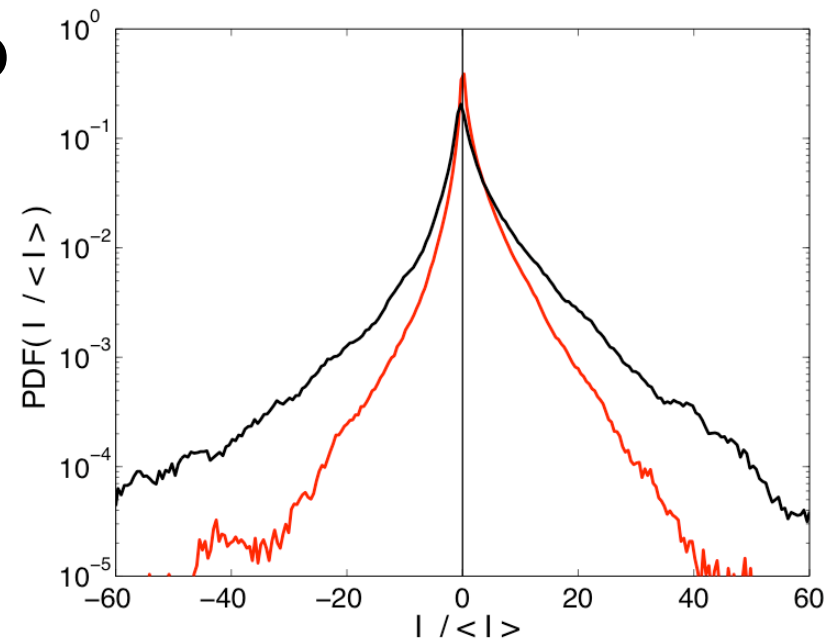
Correction négligeable pour Hg

Correction importante pour H₂O

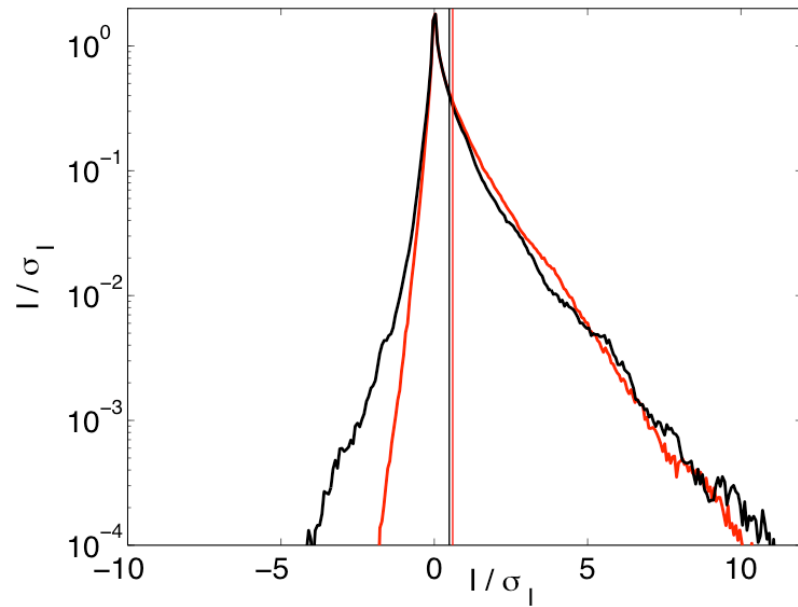
Hg



H₂O

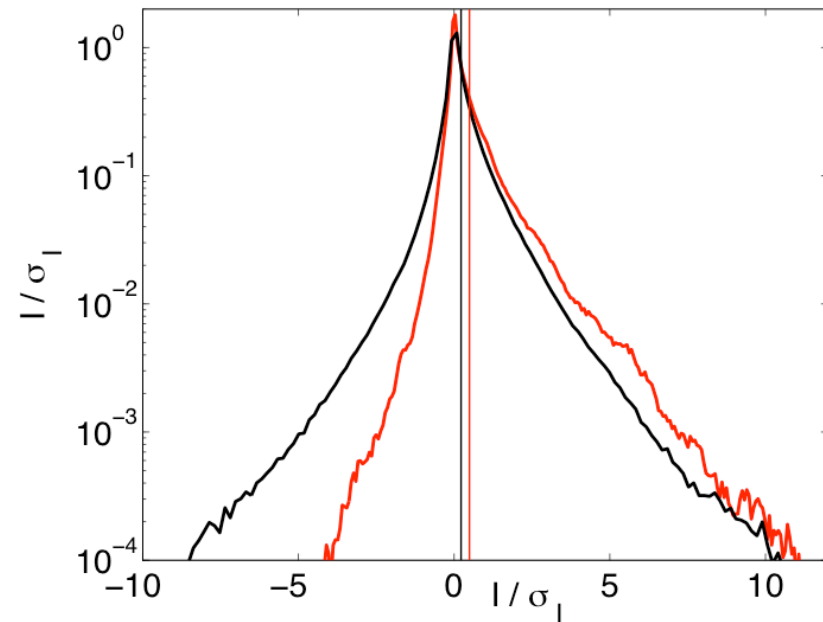


Effet de taille et des paramètres du fluide



Mercure

Eau

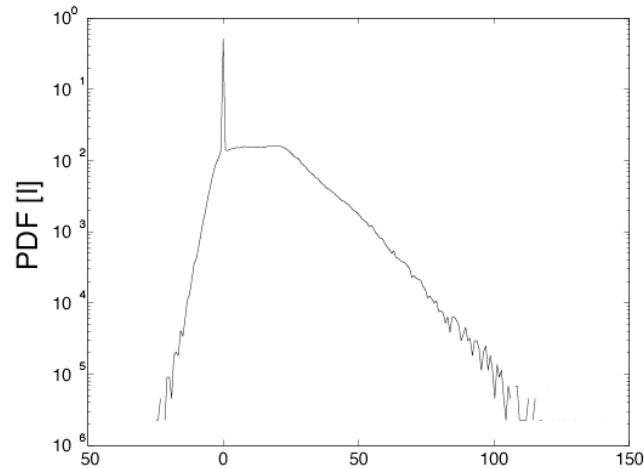


Surface confinée

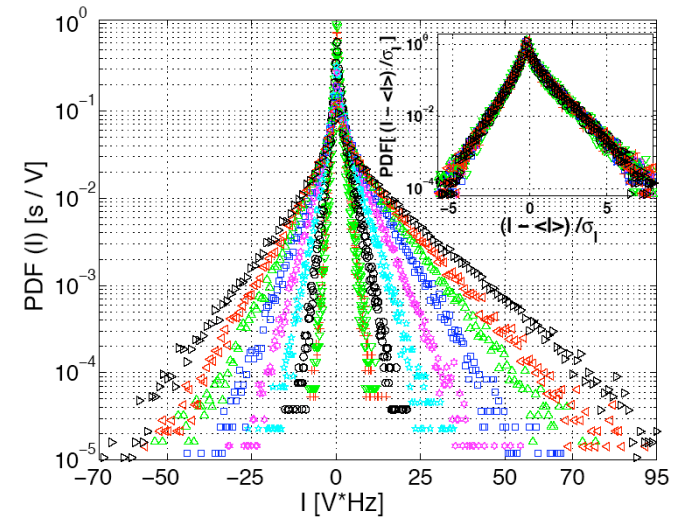
Surface étendue

$$\sigma_I \propto \langle I \rangle = c\rho S_P \sigma_V^2$$

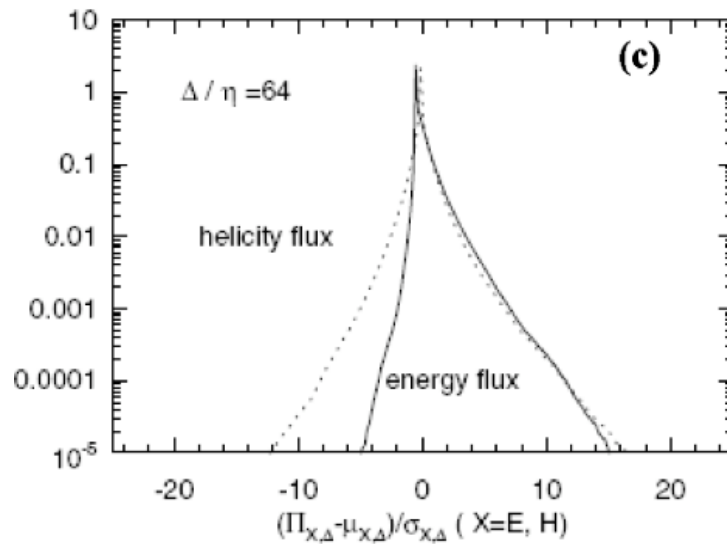
PDF de la puissance injectée dans différents systèmes



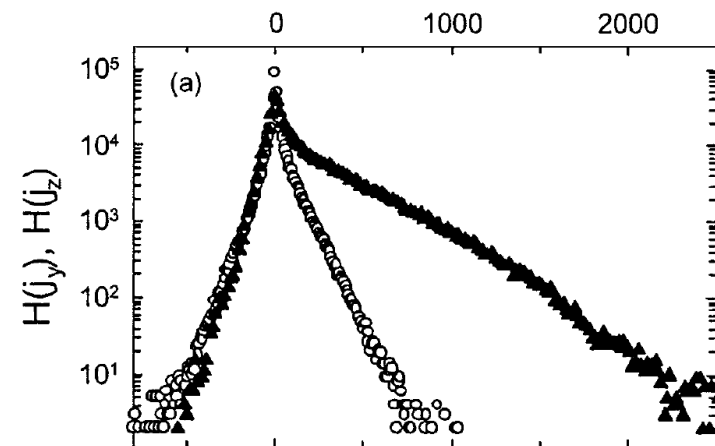
Aumaitre et al., granular gas



Falcon et al., RC circuit



Chen et al., turbulence



Shang et al., convection

Un modèle simple pour la PDF de la puissance injectée
dans le cas d'un forçage aléatoire

(Phys. Rev. Lett. 2008)

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) + f(t) \qquad \frac{df(t)}{dt} = -\beta f(t) + \xi(t)$$

Bivariate normal distribution for P(v, f)

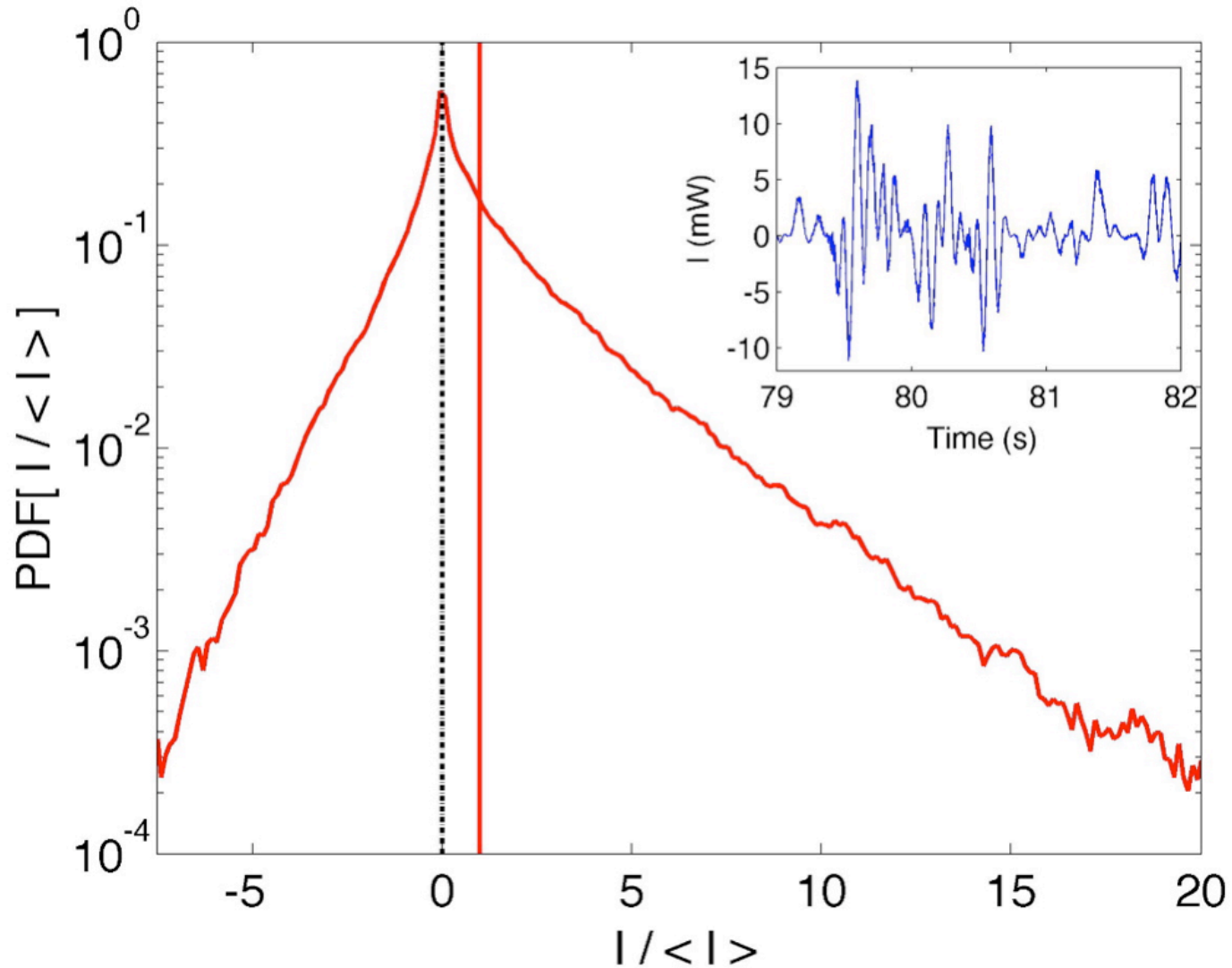
$$\sigma_f^2 = D/2\beta ; \sigma_v^2 = D/2\beta\gamma(\beta+\gamma) ; \rho = \langle I \rangle / \sigma_f \sigma_v ; \langle I \rangle = D/2\beta(\beta+\gamma)$$

$$P(v, f) = \frac{1}{2\pi\sigma_v \cdot \sigma_f (1 - \rho^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (v^2/\sigma_v^2 - 2\rho v f / (\sigma_v \sigma_f) + f^2/\sigma_f^2) \right]$$

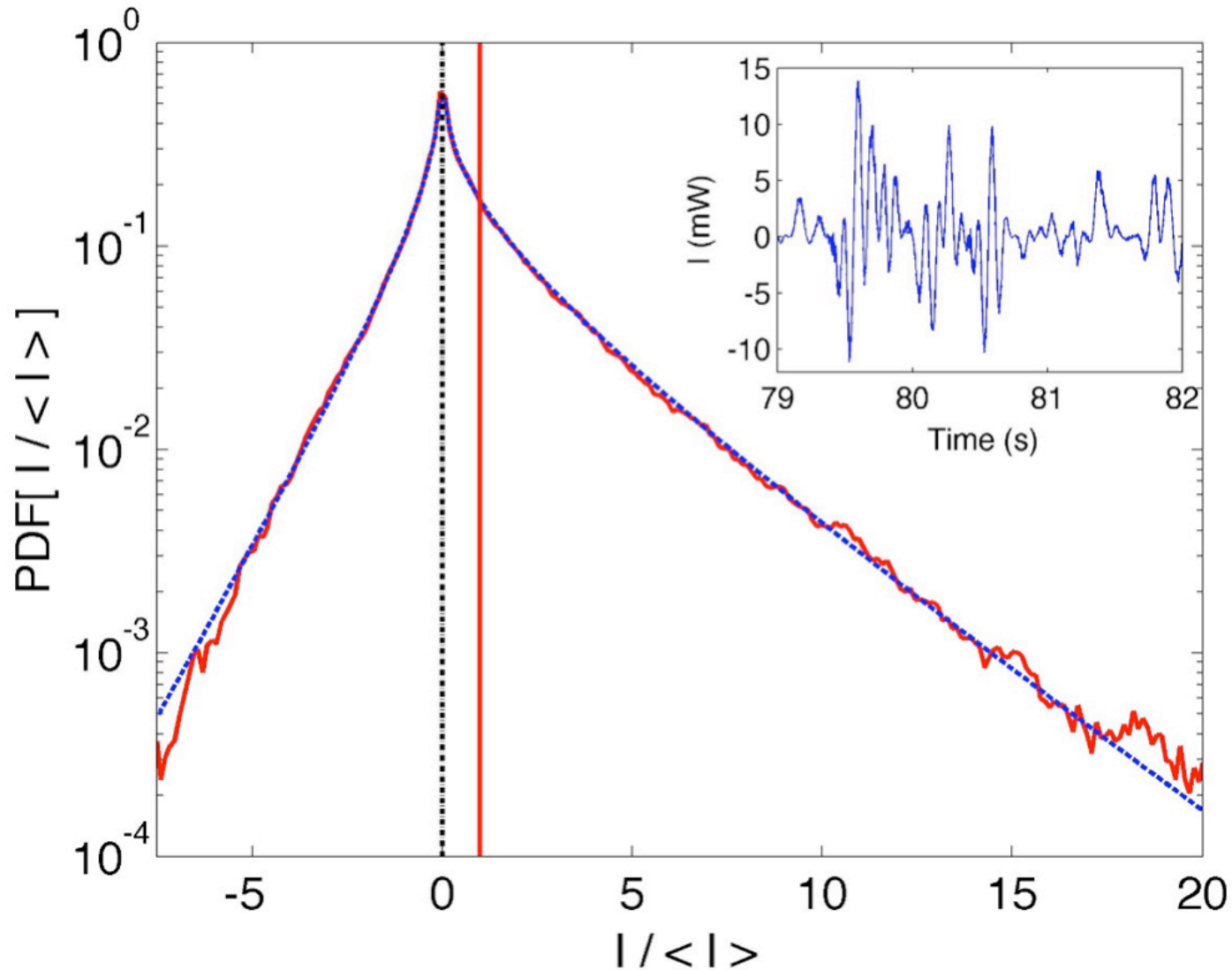
$$P(\tilde{I}) \propto \frac{1}{\sqrt{\tilde{I}}} \exp(\rho\tilde{I} - |\tilde{I}|), \quad \text{with} \quad \tilde{I} = \frac{I}{(1 - \rho^2)\sigma_f \sigma_v}$$

Ailes exponentielles, divergence en I=0, disymétrie résultant de $\langle I \rangle$

PDF de la puissance injectée en turbulence d'ondes



Ajustement de la PDF de puissance injectée à l'aide d'un modèle de type Langevin



Une relation pour la variance du flux d'énergie

$$\frac{dE}{dt} = I - D \quad \text{obviously implies} \quad \langle I \rangle = \langle D \rangle$$

$$\text{but also} \quad |\hat{I}|^2(0) = |\hat{D}|^2(0)$$

and from the Wiener Khintchin theorem

$$\int_0^\infty [\langle I(t')I(0) \rangle - \langle I \rangle^2] dt' = \int_0^\infty [\langle D(t')D(0) \rangle - \langle D \rangle^2] dt'$$

$$\sigma_I^2 \tau_I \propto \sigma_D^2 \tau_D$$

Loi des grandes déviations

$$I_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} I(t') dt'$$

$$\Pi(I_\tau(t) = U) \approx C \cdot \exp(-\tau F_I(U))$$

F_I est la fonction de grande déviation, minimale pour $U = \langle I \rangle$

Les fonctions de grandes déviations de I et D ont le même développement de Taylor pour $\langle I \rangle = \langle D \rangle$ (mais peuvent avoir des ailes différentes)

Farago, J. Stat. Phys. (2002)

Visco et al., Europhys. Lett. (2005)

Implication pour une cascade de type Kolmogorov

$$\frac{dE_{1,2}}{dt} \approx F(k_1, t) - F(k_2, t) \quad \text{in the inertial range}$$

$$\sigma_F^2 \tau_k \propto \sigma_F^2 \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} = \text{constant}$$

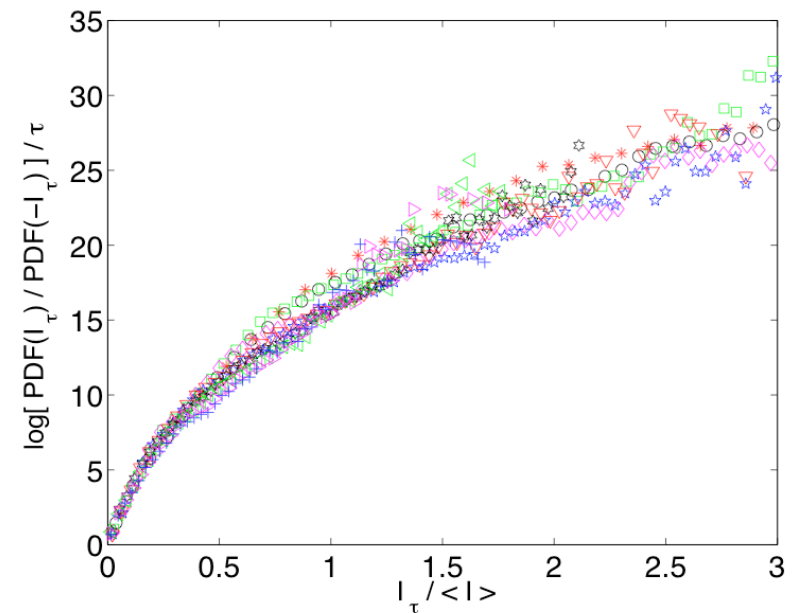
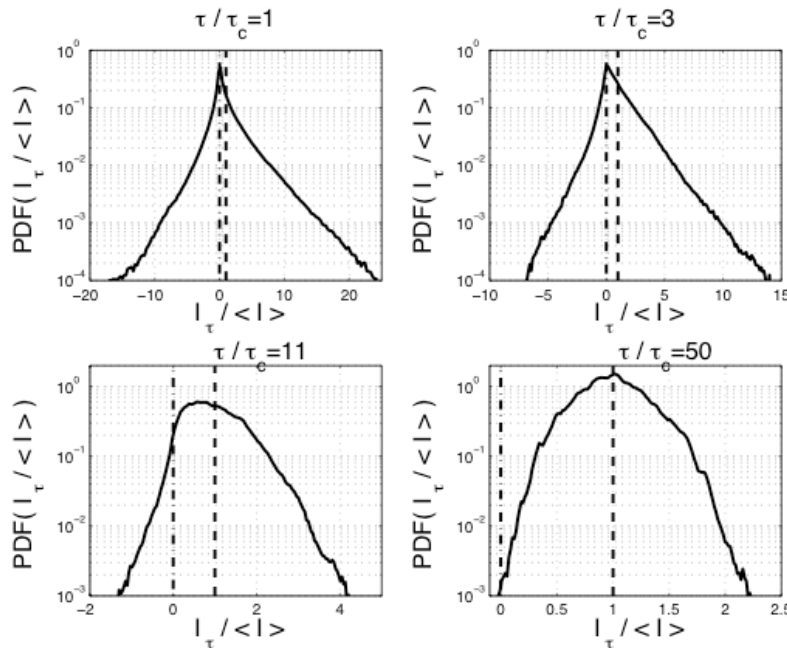
La déviation standard des fluctuations de flux d'énergie croît comme $k^{1/3}$ dans le régime inertiel ou alors reste constante si le temps de corrélation est à l'échelle intégrale

Ceci est certainement connecté au phénomène d'intermittence; il serait utile d'effectuer des mesures directes de flux d'énergie

PDF de la puissance injectée lissée sur un temps long par rapport au temps de corrélation

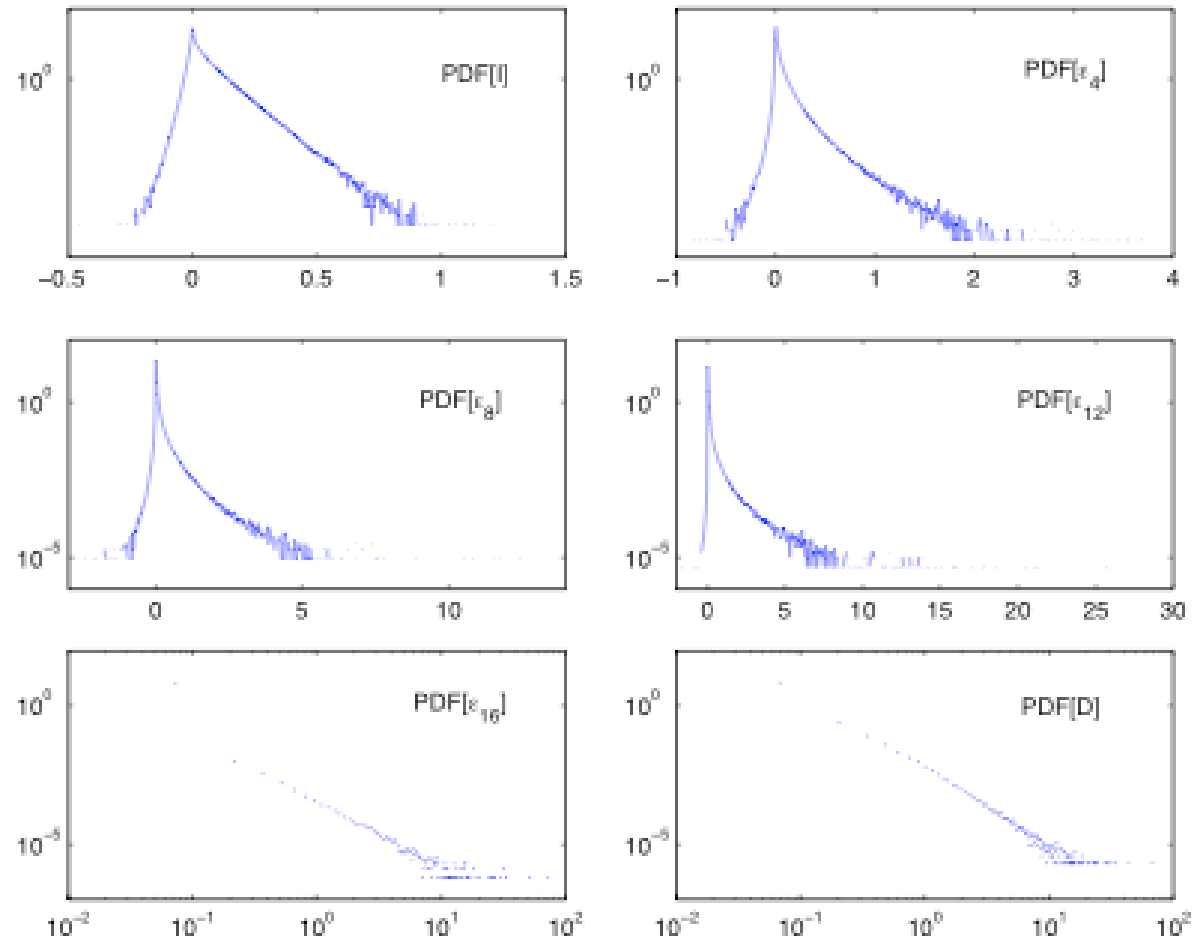
$$I_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} I(t') dt'$$

$$\frac{1}{\tau} \text{Log} \frac{P(I_\tau = \epsilon)}{P(I_\tau = -\epsilon)}$$



En accord avec les résultats analytiques de Farago, J. Stat. Phys. (2002)

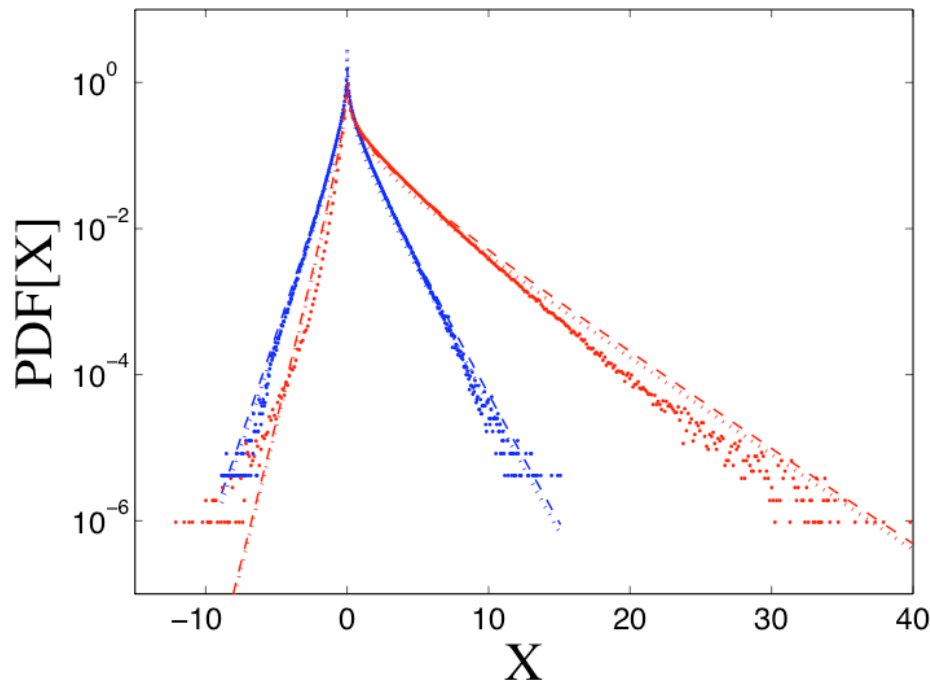
Energy flux in shell models (S. Aumaître, 2007)



Fluctuations are much larger than the mean energy flux

A randomly forced shell model

$$\frac{du_n}{dt} = ik_n \left(u_{n+1}^* u_{n+2}^* - \frac{\alpha}{2} u_{n-1}^* u_{n+1}^* - \frac{1-\alpha}{4} u_{n-2}^* u_{n-1}^* \right) + f_n - \nu k_n^2 u_n$$



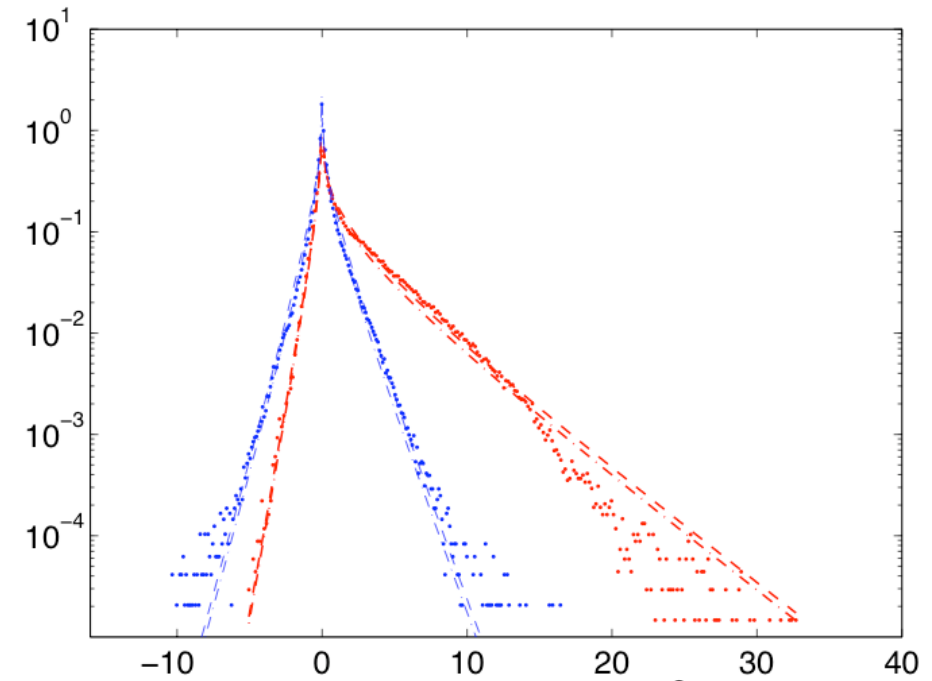
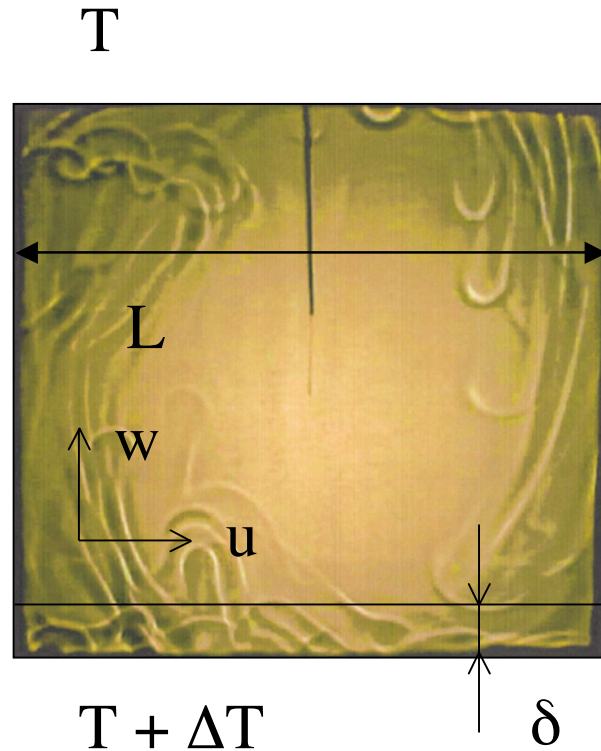
$$k_n = k_0 2^n, \quad k_0 = 2^{-4}, \quad \alpha = 1/2$$

f_4 coloured noise

$$P(X) \propto \frac{1}{\sqrt{X}} \exp(\rho X - |X|)$$

$$\text{Log} \left(\frac{P(X)}{P(-X)} \right) \simeq \frac{\tau_c}{2\sigma_v^2} X$$

Flux de chaleur local en convection turbulente



« flux de chaleur local »: $u\theta$ or $w\theta$

Shang, Qiu, Tong and Xia, PRL 90, 074501 (2003)

S. Aumaître et al. Europhys. Lett. (2003), 2008)