GRANDES DÉVIATIONS
dans
l'ADVECTION TURBULENTE

Krzysztof Gawedzki, Lyon, avril. 2007

Turbulence est un état hors équilibre

Est-elle susceptible d'être analysée par les outils de la mécanique statistique hors équilibre ?

L'obstacle historique :

les outils standard de la mécanique statistique hors équilibre :

les relations de fluctuation-dissipation,
de Green-Kubo, la réciprocité d'Onsager

ont été forgés dans le cadre de la réponse linéaire près de l'équilibre

mais

la turbulence est un état loin de l'équilibre (sauf la turbulence faible ou la turbulence d'ondes)

Progrès plus récent :

les **relations de fluctuation** censées tenir arbitrairement loin de l'équilibre aussi bien dans le régime transitoire que stationnaire (**Evans-Morriss-Searles-Gallavotti-Cohen** 1993-95)

Un point de contact possible ?

Ce séminaire :

qques idées (théoriques) sur la possibilité d'observer les relations de fluctuation dans l'approche lagrangienne de la turbulence et leurs tests dans des modèles simplifiés

Les systèmes étudiés :

- **traceurs lagrangiens** sans inertie :

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})$$

- **particules inertielles** (de masse effective m) :

force de friction

$$m\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{p}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{m}{\tau}\big(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})\big) + \ \ldots$$

temps de Stokes

- Ce sont des exemples de **systèmes dynamiques** (aléatoires pour des vitesses $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r})$ aléatoires)

$$\dot{x} \;=\; u(t,x) \tag{SD}$$

En turbulence, ils apparaissent dans deux régimes :

(i) standard (pour Re intermediaire) avec les vitesses lisses dans l'espace

(ii) non standard (pour Re grand) avec les vitesses continues de Hölder

- À comparer avec la **dynamique de Langevin**, l'exemple (standard) de la mécanique statistique hors équilibre où :

$$u(t,x) \;=\; \overbrace{-\Gamma\nabla H(t,x)}^{\text{terme dissipatif}} + \overbrace{\Pi\nabla H(t,x)}^{\text{terme hamiltonien}} + \underbrace{G(t,x)}_{\text{force non conservative}} + \underbrace{\eta(t)}_{\text{bruit blanc}}$$

- Les **relations de fluctuation** viennent de la comparaison entre la dynamique directe et la dynamique renversé en temps (**Onsager-Machlup** 1953)

- Elles mettent en relation la statistique des événements typiques pour la dynamique directe avec celle des événements rares pour la dynamique renversée

Inversion temporel

Soit $x(t)$ une solution de $(\mathbf{SD})$. La trajectoire inversée en temps

$$x'(t) = x^*(t^*)\,, \qquad \text{où} \qquad t^* = T - t \qquad \text{et} \qquad (x^*)^* = x$$

est une involution qui préserve le volume, satisfait à l'équation

$$\dot{x}' = u'(t, x') \tag{$\mathbf{SD}'$}$$

pour $u'(t,x) = -u^*(t^*, x^*)$

Par exemple :

- $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}$ pour le **traceur lagrangien**,
- $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})^* = (\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{p})$ pour une **particule inertielle**,

correspondent au remplacement $t \mapsto t^*$, $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r}) \mapsto -\boldsymbol{v}(t^*, \boldsymbol{r})$, $\tau \mapsto -\tau$

Remarque : Pour les particules inertielles, comme pour l'équation de Langevin, on peut utiliser une inversion du temps différente qui n'introduit pas de termes anti-dissipatifs

- Pour la trajectoire directe $x(t;x_0)$ qui passe au temps zéro par x_0 ,

$$\frac{\partial(x(T;x_0))}{\partial(x_0)} = \mathrm{e}^{-\int_0^T \sigma(t)\,dt}$$

où $\sigma(t) = -\nabla.u(t,x(t;x_0))$ est le **taux de contraction** de l'espace (de phases) le long la trajectoire. Ceci implique l'identité

$$\delta(x_0'^* - x(T;x_0))\ \mathrm{e}^{-\int_0^T \sigma(t)\,dt} = \delta(x_0^* - x'(T;x_0')) \qquad (*)$$

où $x'(t;x_0')$ est la trajectoire inversée qui passe au temps zéro par x_0'

- Soit $\langle - \rangle$ la moyenne sur les réalisations de $u(t,x)$ et

$$P_{x_0}^T(\Sigma,y) = \Big\langle \delta\big(\Sigma - \int_0^T \sigma(t)\,dt\big)\ \delta\big(y - x(T;x_0)\big)\Big\rangle$$

la PDF jointe de la contraction cumulée d'espace (de phases) (assimilé souvent à la **production d'entropie**) et du point final

Relation de fluctuation de Evans-Searles

Comme $\sigma'(t) \equiv \nabla . u'(t; x'(t)) = -\sigma(t^*)$ pour la trajectoire inversée, on obtient en moyennant $(*)$ multiplié par $\delta\big(\Sigma - \int_0^T \sigma(t)\, dt\big) = \delta\big(\Sigma + \int_0^T \sigma'(t)\, dt\big)$ la **relation de fluctuation** la plus simple (de Evans-Searles) :

$$P^T_{x_0}(\Sigma, x_0'^*)\ e^{-\Sigma} = P'^T_{x_0'}(-\Sigma, x_0^*) \qquad (\mathbf{ES})$$

où P' et comme P mais pour le processus inversé en temps

Remarques

- $(\mathbf{ES})$ tient comme une identité pour tout $x_0,\ x_0'$ et T **!**
  C'est une relation de fluctuation **transitoire**
- Si le processus est **réversible**, c.-à-d. si $u(t,x)$ et $u'(t,x)$ ont les même distributions, alors P' dans $(\mathbf{ES})$ peut être remplacé par P

Grandes déviations et relations de fluctuation stationnaires

- Dans la situation stationnaire, ont peut s'attendre (et parfois montrer) que la PDF de Σ possède le régime de **grandes déviations** avec

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P^T_{x_0}(\sigma T, y) \;=\; -\,\zeta(\sigma)$$

où ζ s'appelle la **fonction de taux** (ou de Cramer) de grandes déviations

- **Remarque :** L'existence de la limite veut dire que pour grands T,

$$P^T_{x_0}(\Sigma, y) \;\approx\; \mathrm{e}^{-T\,\zeta\left(\frac{\Sigma}{T}\right)}$$

- Si le régime de grandes déviations pour Σ existe alors **(ES)** implique la **relations de fluctuation stationnaire**

$$\zeta(\sigma) + \sigma \;=\; \zeta'(-\sigma) \qquad \textbf{(GC)}$$

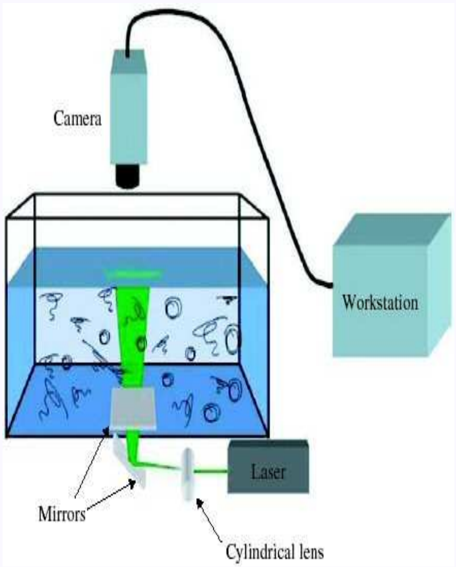
démontrée rigoureusement par Gallavotti-Cohen pour les systèmes dynamiques chaotiques (ζ' peut être replacé par ζ pour le système réversible)

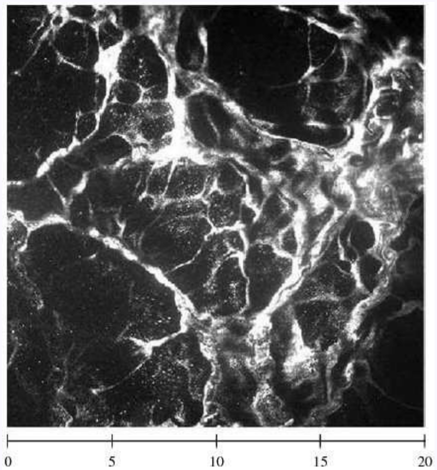
Pour les traceurs dans un écoulement incompressible, $\sigma(t) \equiv 0$

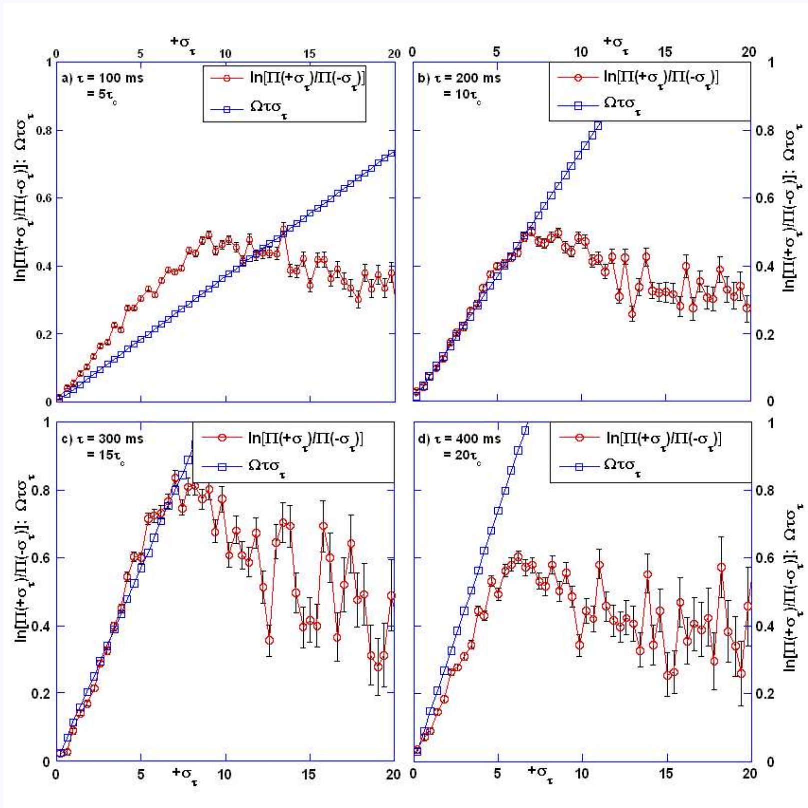
Test de la relation (GC) dans l'écoulement compressible

Mesures de traceurs lagrangiens flottants sur la surface par

Bandi-Cressman-Goldburg, J. Stat. Phys. **130**, 27-38 (2008)







Tests pour les particules inertielles dans des écoulements incompressibles ?

Relations de fluctuation multiplicatives

- Pour le système dynamique **(SD)** avec $u(t,x)$ lisse, on peut considérer le **système tangent** induit

$$\dot{x}^i \,=\, u^i(t,x)\,, \qquad \dot{X}^i{}_j \,=\, \partial_k u^i(t,x)\, X^k{}_j \qquad \textbf{(SDT)}$$

où $X^i{}_j(t)$ t.q. $X^i{}_j(0)=\delta^i_j$ propage les petits écarts entres les trajectoires :

$$\delta x^i(t) \,=\, X^i{}_j(t)\,\delta x^j(0)$$

- Pour le système tangent, le taux de contraction $\sigma(t)=-(d+1)\nabla.u(t,x(t))$ et

$$P^T_{x_0,X_0}(\Sigma,y,Y) \,=\, \delta\big(\Sigma+(d+1)\ln\det\,(Y X_0^{-1})\ \ P^T_{x_0,X_0}(y,Y)$$

parce que $\int\limits_0^T\sigma(t)\,dt = -(d+1)\ln\det\,\big(Y X_0^{-1}\big)$

- Pour $(x,X)^* = (x^*,X^*)$ où $X^{*\,i}{}_j = \frac{\partial x^{*\,i}(x)}{\partial x^k}X^k{}_j$ l'inversement temporaire du système tangent coïncide avec le système tangent du système inversé

- La relations de fluctuation **(ES)** pour **(SDT)** se réduit à l'identité

$$P^{T}_{x_0, X_0}(x_0'^{*}, X) \ \det X \ = \ P'^{T}_{x_0', X_0'}(x_0^{*}, X^{-1}) \ \det X^{-2d}$$

où $(X_0)^{i}{}_{j} = \frac{\partial x^{*\,i}}{\partial x^{j}}(x_0^{*})$ et $(X_0')^{i}{}_{j} = \frac{\partial x^{*\,i}}{\partial x^{j}}(x_0'^{*})$ $\Big(\det X^{-2d} = \frac{\partial(X^{-1})}{\partial(X)}\Big)$

- Pour les **exposants d'étirement** $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \ \ldots \ \geq \rho_d$
définis par la diagonalisation :

$$X^{t} X \ = \ O^{t} \ \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{2\rho_1}, \ldots, \mathrm{e}^{2\rho_d}] \ O$$

où O est une matrice orthogonale, on obtient, en particulier,
la **relation de fluctuation multiplicative** transitoire

$$P^{T}_{x_0}(x_0', \vec{\rho}) \ \mathrm{e}^{\sum\limits_i \rho_i} \ = \ P'^{T}_{x_0'}(x_0^{*}, -\overleftarrow{\rho}) \qquad \textbf{(RFMtran)}$$

avec $\overleftarrow{\rho} = (\rho_d, \ldots, \rho_1)$ et $P' = P$ pour un système réversible

- **(RFMtran)** est une extension de **(ES)** dont Σ est égale à $-\sum\limits_i \rho_i$ **!**

Grandes déviations multiplicatives

- Dans une situation stationnaire, par le **Théorème Multiplicative Ergodique**

$$\lim_{T\to\infty} \; P_{x_0}^{T}(y,\vec{\eta}T) \; = \; n(y)\;\delta(\vec{\eta}-\vec{\lambda})$$

  où $n(y)$ est la densité invariante et $\vec{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ est le vecteur des **exposants de Lyapunov**

- Si ces exposants sont différents, on s'attend que la limite

$$\lim_{T\to\infty} \; \frac{1}{T} \; \ln \, P_{x_0}^{T}(x_0',\vec{\eta}T) \; = \; Z(\vec{\eta})$$

  existe et définit la fonction Z de taux de **grandes déviations multiplicatives**

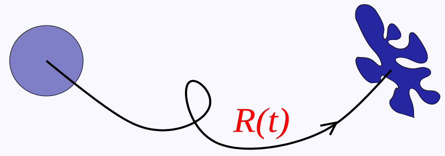
- $Z(\vec{\eta})$ atteint le minimum égale zéro pour $\vec{\eta}=\vec{\lambda}$ mais contient plus d'info **!**

- (**RFMtran**) implique la **relation de fluctuation multiplicative** stationnaire :

$$Z(\vec{\eta}) - \sum_i \eta_i \; = \; Z'(-\vec{\eta}) \qquad \textbf{(RFMstat)}$$

- Z détermine les propriétés de transport comme, par exemple :

(i) le taux de croissance des fluctuations de la densité dans le repère lagrangien

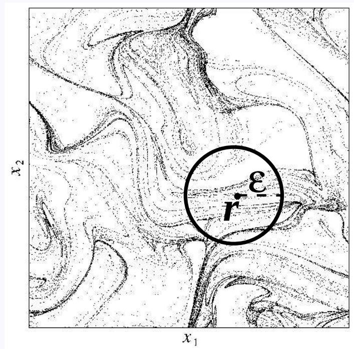


$$\langle n(x(t))^p \rangle \propto t^{\gamma_p} \quad \text{pour} \quad \gamma_p = -\min_{\vec{\eta}} [p \sum_i \eta_i + Z(\vec{\eta})]$$

(ii) les dimensions multi-fractales $d_{p+1} = \xi_p / p$ des mesures **SRB** $n(dx|u)$ sur les attracteurs

$$\left\langle \int m_\epsilon(x|u)^p \, n(dx|u) \right\rangle \propto \epsilon^{\xi_p}$$

où $m_\epsilon(x|u) = \int_{|x'-x| \leq \epsilon} n(dx'|u)$ et la n-masse dans une petite balle de rayon ϵ centrée en x



Par une généralisation de la formule de **Kaplan-York** (Grassberger-Badii-Politi 1986-88, Bec-Horvai-K.G. 2004)

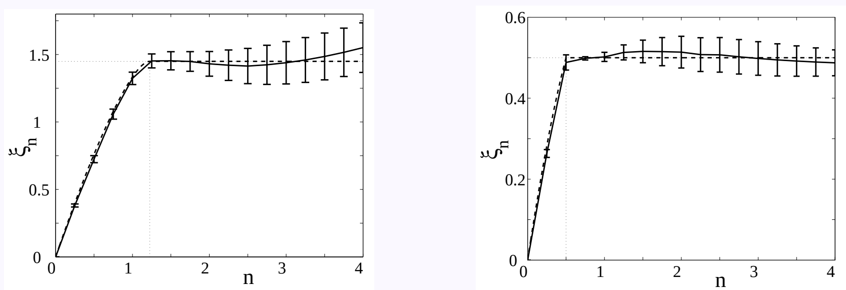
$$\xi_p = \max_{\substack{0 \leq \xi_p^{(i)} \leq p \\ \vec{\xi}_p \in \mathcal{K}}} \sum_{i=1}^{d} \xi_p^{(i)} \quad \text{où} \quad \mathcal{K} = \{ \vec{\xi} \mid \min_{\vec{\eta}} [\vec{\xi}.\vec{\eta} + Z(\vec{\eta})] = 0 \}$$

- Z commence à être accessible dans les simulations numériques d'écoulements réalistes et devrait être aussi mesurable dans des expériences

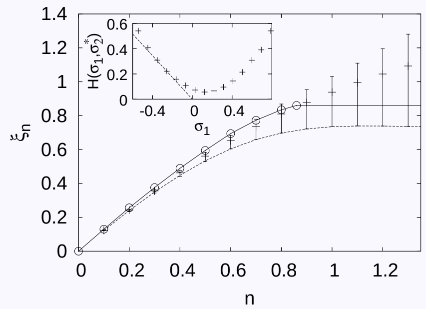
Boffeta-Davoudi-De Lillo, Europhys. Lett., **74**, 62-68 (2006)
(résultats numériques pour les traceurs flottants)

- Z est calculable analytiquement dans le **modèle de Kraichnan** d'écoulement turbulent (plus de détails dans la conférence suivante de Raphaële Chetrite)

- Ceci a rendu possible le calcul des dimensions multi-fractales $d_{p+1} = \xi_p / p$:



modèle de Kraichnan en 2d pour
des compressibilités différentes



flotteurs à la surface

Bec-Horvai-K.G. 2004

Boffeta-Davoudi-De Lilo (2006)

Conclusions

- Les relations de fluctuation transitoires et stationnaires offrent un point de contact entre la physique statistique hors équilibre et la turbulence
- Leur domaine naturel d'application est la dynamique de particules advectées (lagrangiennes, inertielles, étendues - bulles, polymères, etc.)
- Ce sont des lois statistiques qui s'étendent aux événements rares décrits par les grandes déviations
- Dans la version multiplicative applicable aux écoulements à des Re moyens, les grandes déviations déterminent certaines propriétés de transport
- L'analyse théorique appelle ici à plus de travail numérique et expérimental
- Le rôle des relations de fluctuation dans le régime de la turbulence développée (par exemple, pour la séparation des particules) reste à explorer