Modèle à deux fluides de l'équation d'Euler tronquée

G. Krstulovic et M.E Brachet

Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure de Paris

Physica D (2007), doi:10.1016/j.physd.2007.11.008

Équation d'Euler tronquée

$$\partial_t \hat{v}_\alpha(\mathbf{k},t) = -\frac{i}{2}\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k})\sum_{\mathbf{p}} \hat{v}_\beta(\mathbf{p},t)\hat{v}_\gamma(\mathbf{k}-\mathbf{p},t)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = 0 \text{ for } \sup_\alpha |k_\alpha| \leq k_{\max}$$

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma} = k_\beta P_{\alpha\gamma} + k_\gamma P_{\alpha\beta}$$

$$P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2$$

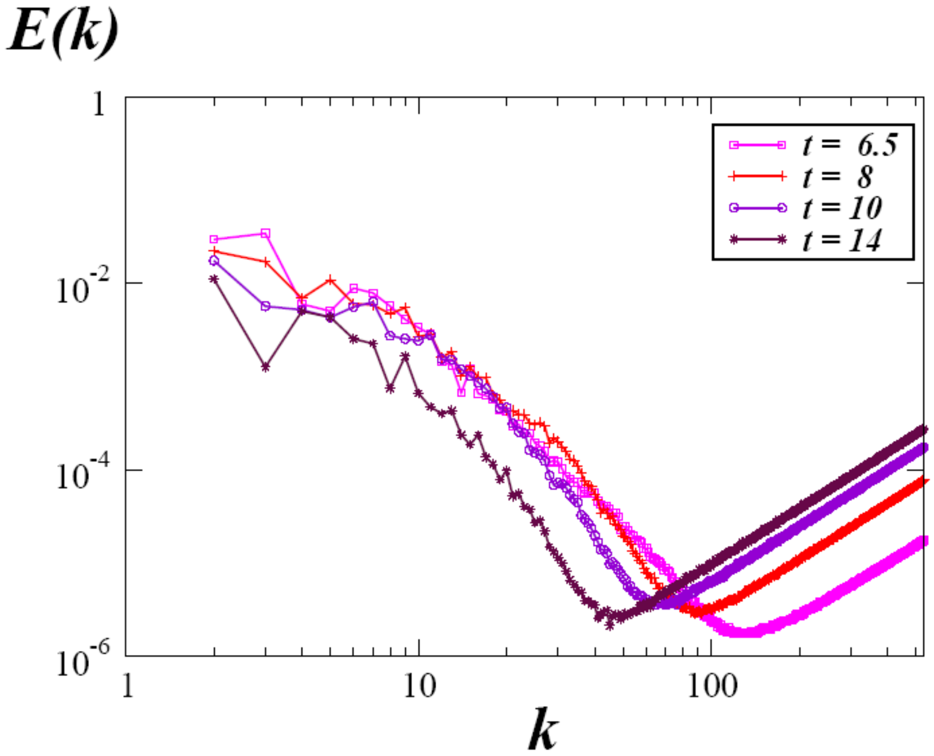
Équilibre absolu

$$\partial_t \hat{v}_\alpha(\mathbf{k},t) = -\frac{i}{2}\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}} \hat{v}_\beta(\mathbf{p},t)\hat{v}_\gamma(\mathbf{k}-\mathbf{p},t)$$

$\hat{v}_\alpha(\mathbf{k}) \sim e^{-\beta E}$ Champ gaussienne

$$E(k) \sim k^2$$

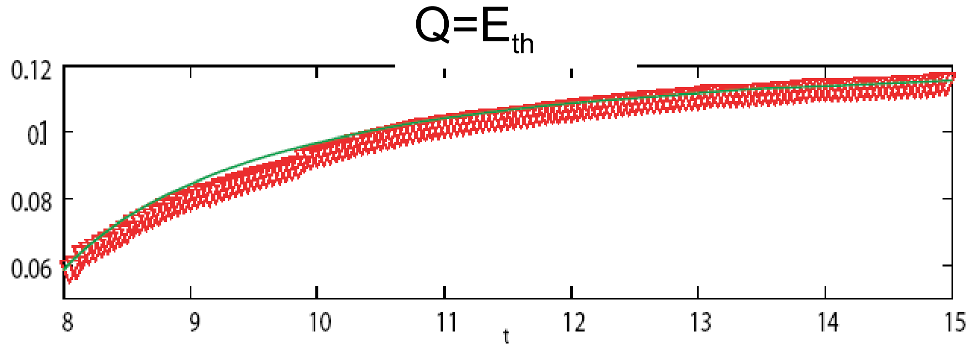
Séparation d'échelle



C. Cichowlas, P. Bonaïti,F. Debbasch and M. Brachet. Effective dissipation and turbulence in spectrally truncated euler flows. *Phys. Rev. Lett.*, 95(26), 2005.

Statistique des petites échelles

$$E_{\mathrm{th}}(t) = \sum_{k_{\mathrm{th}}(t)<k} E(k,t)$$



Filtres

$$f^{<}(\mathbf{r}) = \sum_k F(\mathbf{k}) \hat{f}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

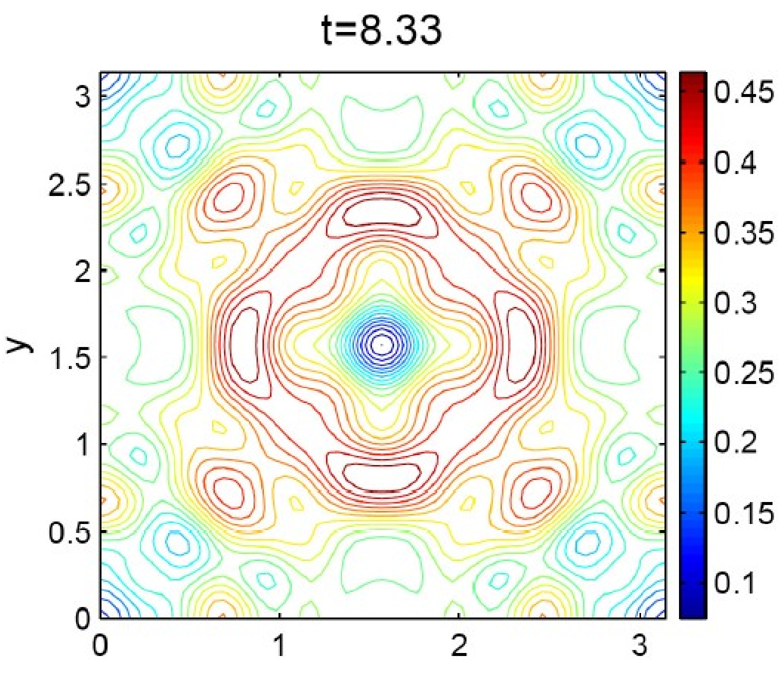
$$f^{>}(\mathbf{r}) = 1 - f^{<}(\mathbf{r})$$

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left[\frac{|k| - k_{\mathrm{th}}}{\Delta k}\right]\right)$$

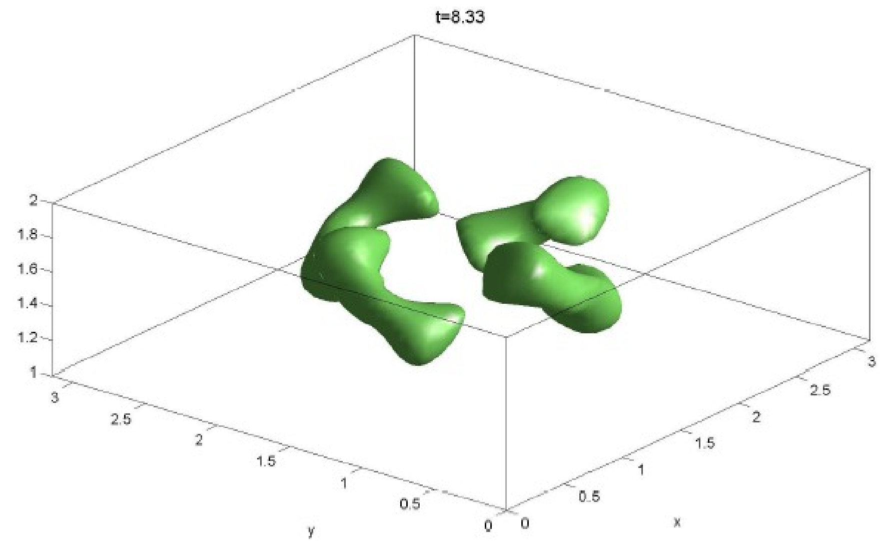
Chaleur local

$$< Q(r) >= E_{\rm th}$$

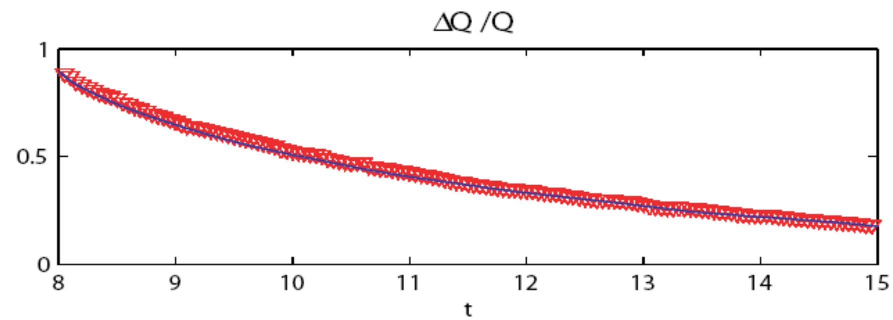
$$Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{v}^{>})^2\right]^{<}(\mathbf{r})$$



(a)Cut at $z = \frac{\pi}{2}$ of Q.

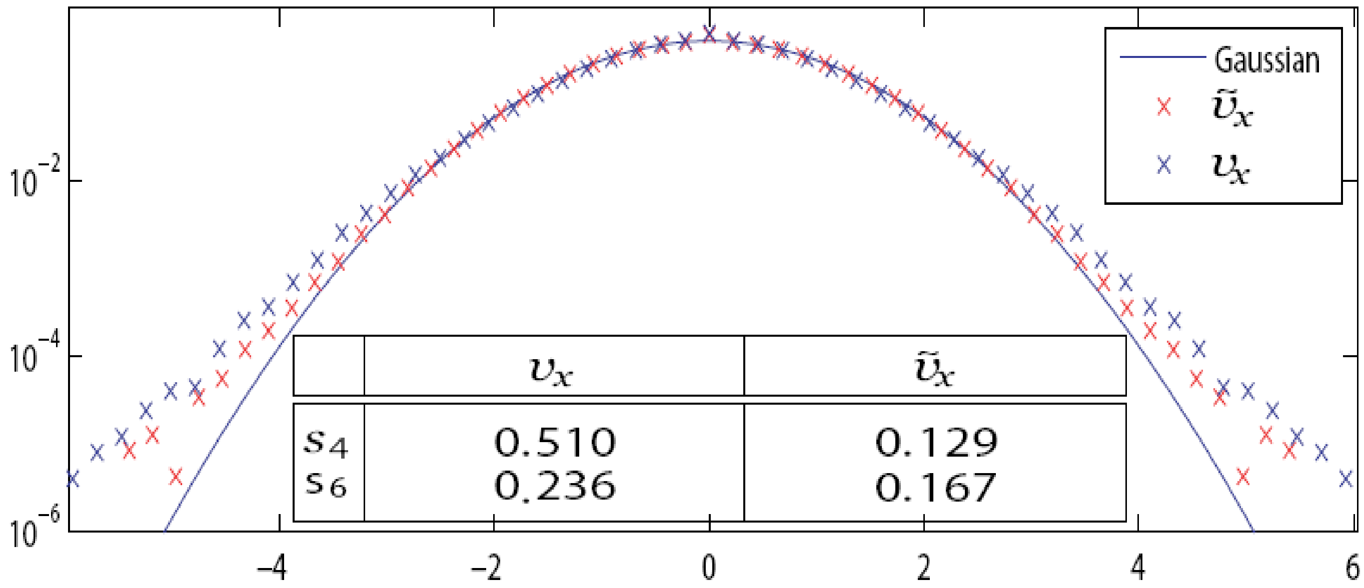


(b)Isosurface $Q(r) = 0.8Q_{max} = 0.42$



Statistique quasi-gaussienne

$$\tilde{v}^{>} = \frac{v^{>}}{\sqrt{Q}}$$



Histogram de $v_x^{>}$ et $\tilde{v}_x^{>}$.

Modèle à deux fluides

- Diffusion de la chaleur
- Dissipation effective
- L’énergie total est conservée

Modèle à deux fluides

$$\partial_t v_i^< + v_j^< \partial_j v_i^< = -\partial_i \tilde{p} + \partial_j \sigma'_{ij}$$

$$\partial_i v_i^< = 0$$

$$T = Q/c$$

$$c = 8k_{\max}^3$$

$$\partial_t T + v_j^< \partial_j T = \mathcal{D}T + \frac{1}{2c}\left(\partial_j v_i^< + \partial_i v_j^<\right)\sigma'_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \mathcal{F}^{-1}[\nu_{\mathrm{eff}}(k)(ik_i \hat{v}_j^< + ik_j \hat{v}_i^<)]$$

$$\mathcal{D}T = \mathcal{F}^{-1}[-k^2 D_{\mathrm{eff}}(k)\mathcal{F}[T]]$$

$\langle \frac{1}{2}(\mathbf{v}^<)^2 + cT \rangle$ Est conservée

Modèle à deux fluides

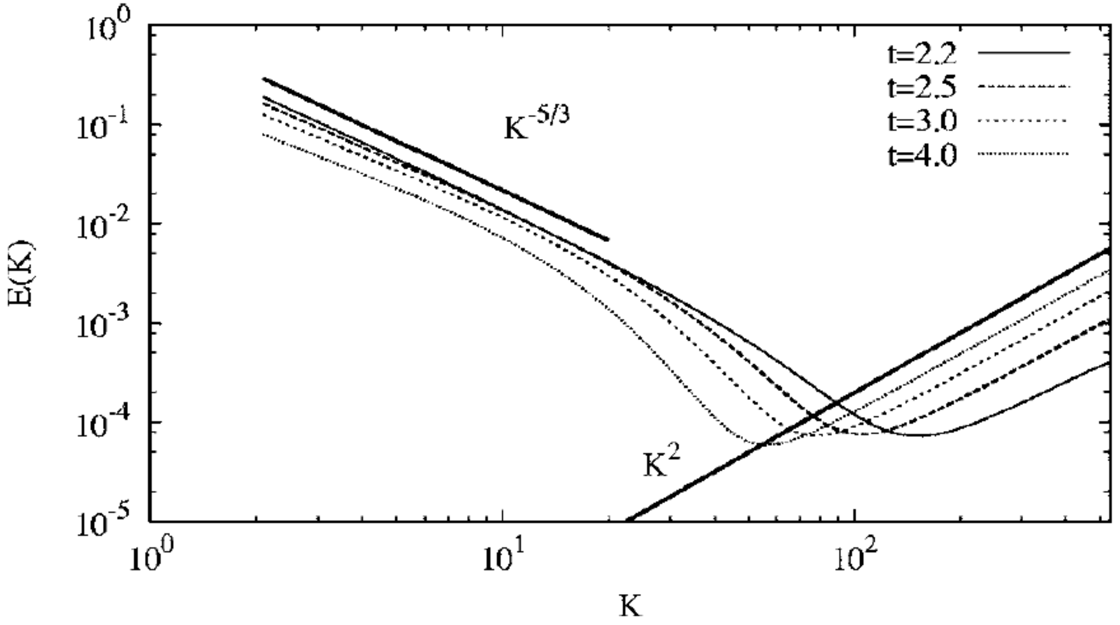
$$\langle Q \rangle = E_{\rm th}$$

$$[E_{\rm th}(t)] = L^2 T^{-2}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{\rm eff} &= \frac{\sqrt{E_{\rm th}}}{k_{\rm max}} f\left(\frac{k}{k_{\rm max}}, \frac{k_0}{k_{\rm max}}\right) \\
D_{\rm eff} &= \frac{\sqrt{E_{\rm th}}}{k_{\rm max}} \Psi\left(\frac{k}{k_{\rm max}}, \frac{k_0}{k_{\rm max}}\right)
\end{aligned}$$

Détermination EDQNM de la viscosité

EDQNM reproduit la dynamique de l'équation d'Euler tronquée.



W. J. T. Bos and J.-P. Bertoglio Dynamics of spectrally truncated inviscid turbulence. *Phys. Fluids*, 18(071701), 2006.

Détermination EDQNM de la viscosité

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T_{NL}(k,t)$$

$$T_{NL}(k,t) = \int\int_{\triangle} \Theta_{kpq}(xy+z^3)[k^2 pE(p,t)E(q,t) - p^3 E(q,t)E(k,t)]\frac{dp\,dq}{pq}$$

$$\Theta_{kpq} = \frac{1-\exp\left(-(\eta_k+\eta_p+\eta_q)t\right)}{\eta_k+\eta_p+\eta_q}$$

eddy damped

$$\eta_k = \lambda\sqrt{\int_0^k s^2 E(s,t)\,ds.}$$

$\lambda = 0.36$

Détermination EDQNM de la viscosité

Équilibre absolu + perturbation:

Ansatz

$$E(p,t) = \frac{3E_{\rm th}}{k_{\rm max}^3}p^2 + \gamma(t)\delta(p - k_{\rm pert})$$

$$E_{\rm th} \gg \gamma$$

Détermination EDQNM de la viscosité

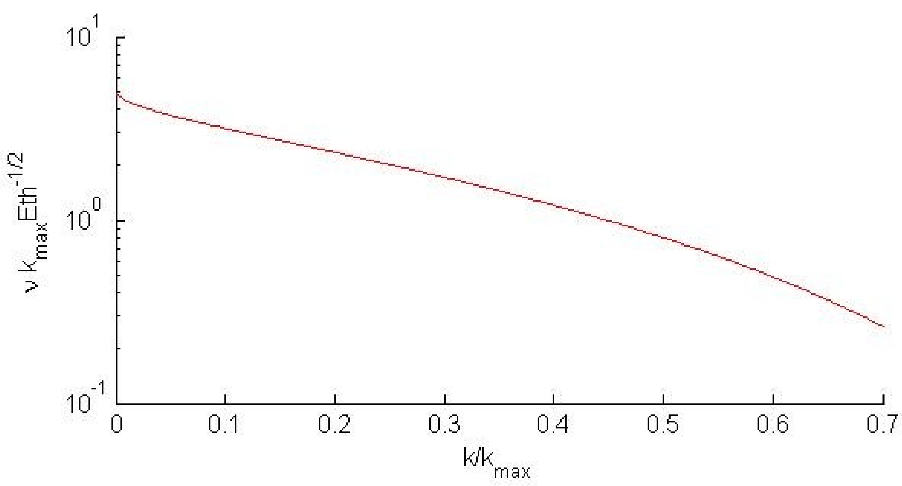
$$T_{NL}(k,t) = -\gamma(t)\delta(k - k_{\mathrm{pert}})k^2 \frac{\sqrt{E_{\mathrm{th}}}}{k_{\mathrm{max}}} \frac{\sqrt{30}}{\lambda} I\left(\frac{k}{k_{\mathrm{max}}}\right)$$

$$I(x) = \sqrt{x} \int_{1}^{\frac{2-x}{x}} \int_{-1}^{1} \frac{(p^2-1)(1-q^2)(q^2+p^2(1+2q^2)))}{(p^2-q^2)(2^{\frac{5}{2}}+((p-q)^{\frac{5}{2}}+(p+q)^{\frac{5}{2}}))}\, dq\, dp$$

$$T_{NL}(k,t) = \frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t}\delta(k - k_{pert})$$

Détermination EDQNM de la viscosité

$$\nu_{\text{eff}}(k) = \frac{\sqrt{E_{\text{th}}}}{k_{\max}} \frac{\sqrt{30}}{2\lambda} I\left(\frac{k}{k_{\max}}\right)$$



small $k/k_{\max}$ limit

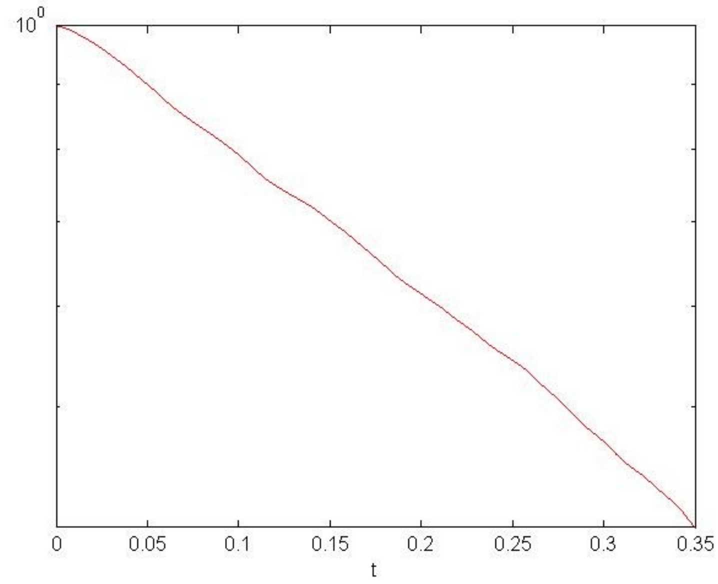
$$\nu_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{E_{\text{th}}}}{k_{\max}} \frac{7}{\sqrt{15}\lambda}$$

$\frac{7}{\sqrt{15}\lambda} = 5.021$ for the classic value of $\lambda = 0.36$

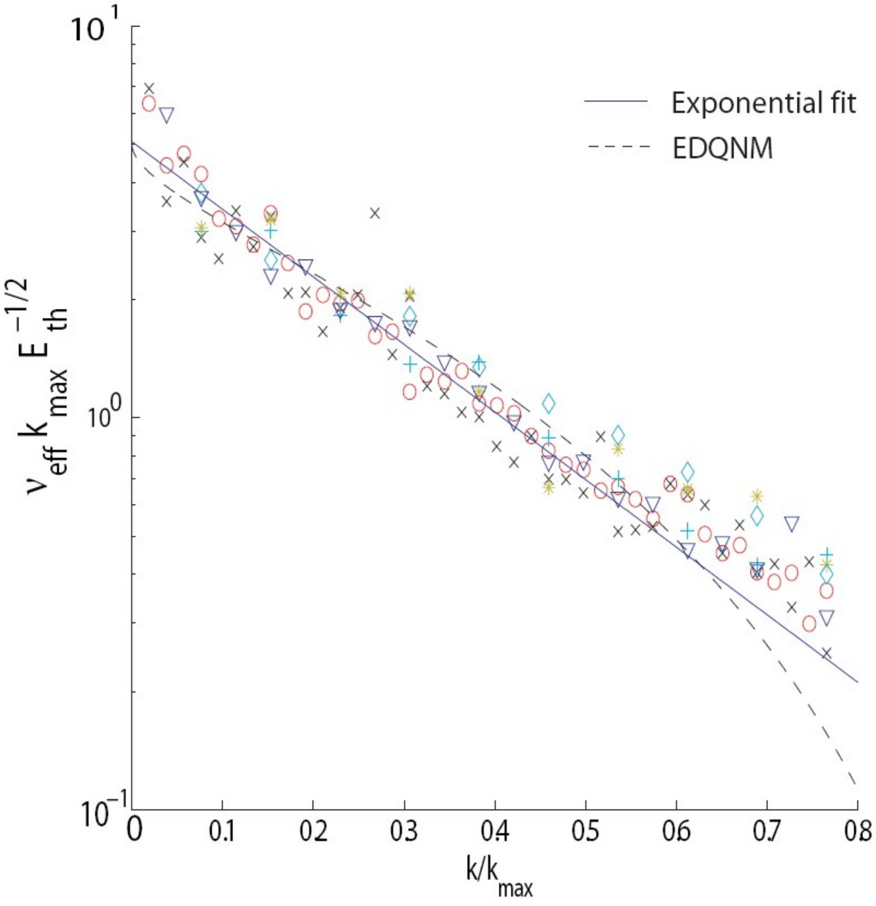
Détermination numérique de la viscosité

$$
\begin{aligned}
u &= \cos kx \sin ky + u_{\mathrm{eq}} \\
v &= -\sin kx \cos ky + v_{\mathrm{eq}} \\
w &= w_{\mathrm{eq}}
\end{aligned}
$$

$$\langle u_{\mathrm{eq}}^2 + v_{\mathrm{eq}}^2 + w_{\mathrm{eq}}^2 \rangle = 2E_{\mathrm{th}}$$



Détermination numérique de la viscosité



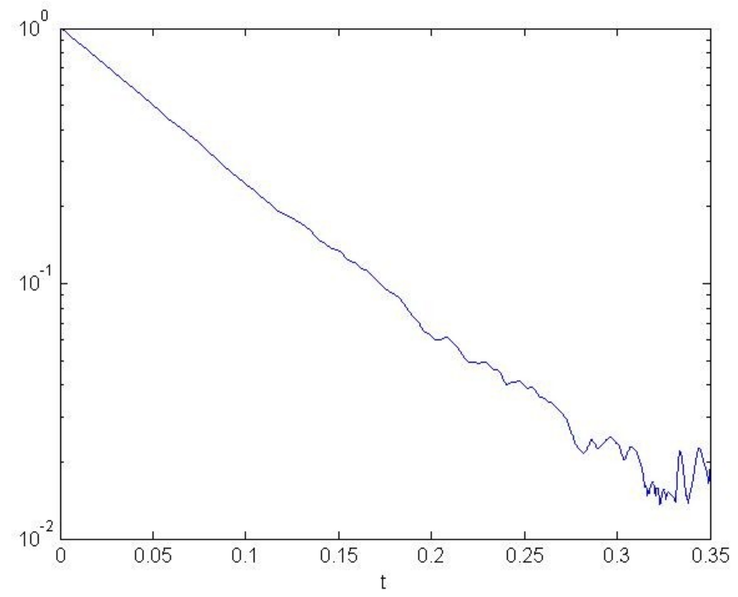
$$\nu_{\text{eff}} = 5.0723 \frac{\sqrt{Eth}}{k_{\max}} e^{-3.97k/k_{\max}}$$

Détermination numérique de la diffusivité thermique

On considère un pseudo- équilibre: une gaussienne modulé spatialement

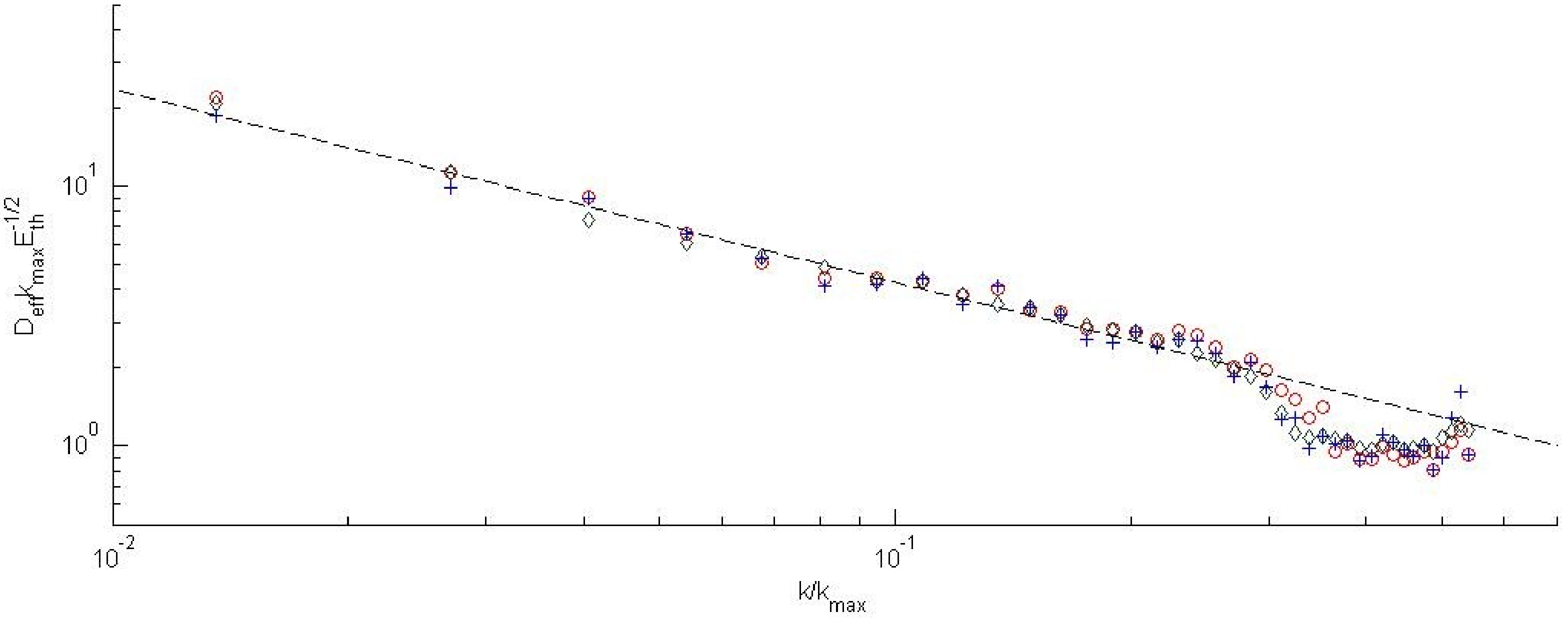
$$\langle u^2 + v^2 + w^2 \rangle = 2E_{\rm th} + 2\epsilon \cos kx$$

$$\text{with } \epsilon < E_{\rm th}$$



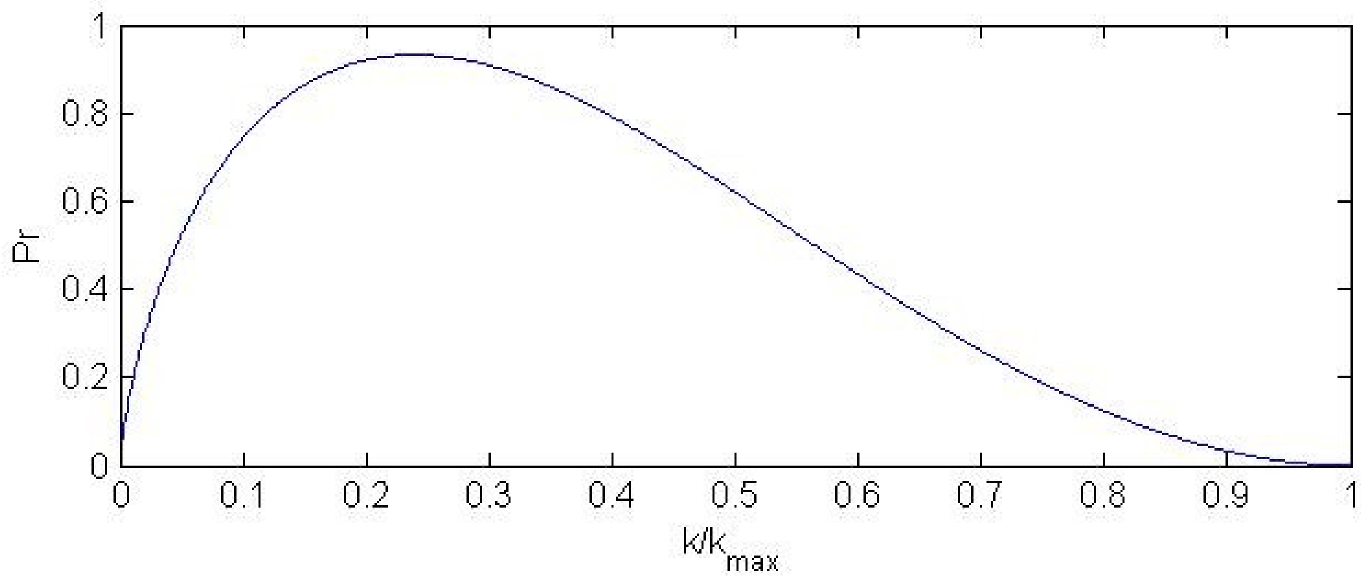
Détermination numérique de la diffusivité thermique

$$D_{\text{eff}} = 0.7723 \frac{\sqrt{Eth}}{k_{\max}} (k/k_{\max})^{-0.74}$$



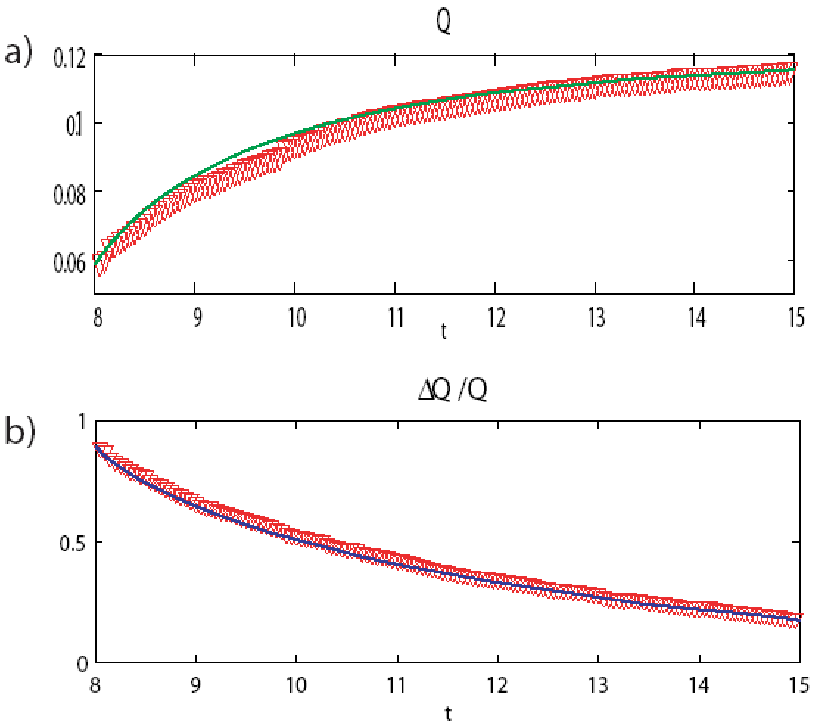
Nombre de Prandtl effective

$$Pr_{\text{eff}}(k) = \nu_{\text{eff}}(k)/D_{\text{eff}}(k)$$



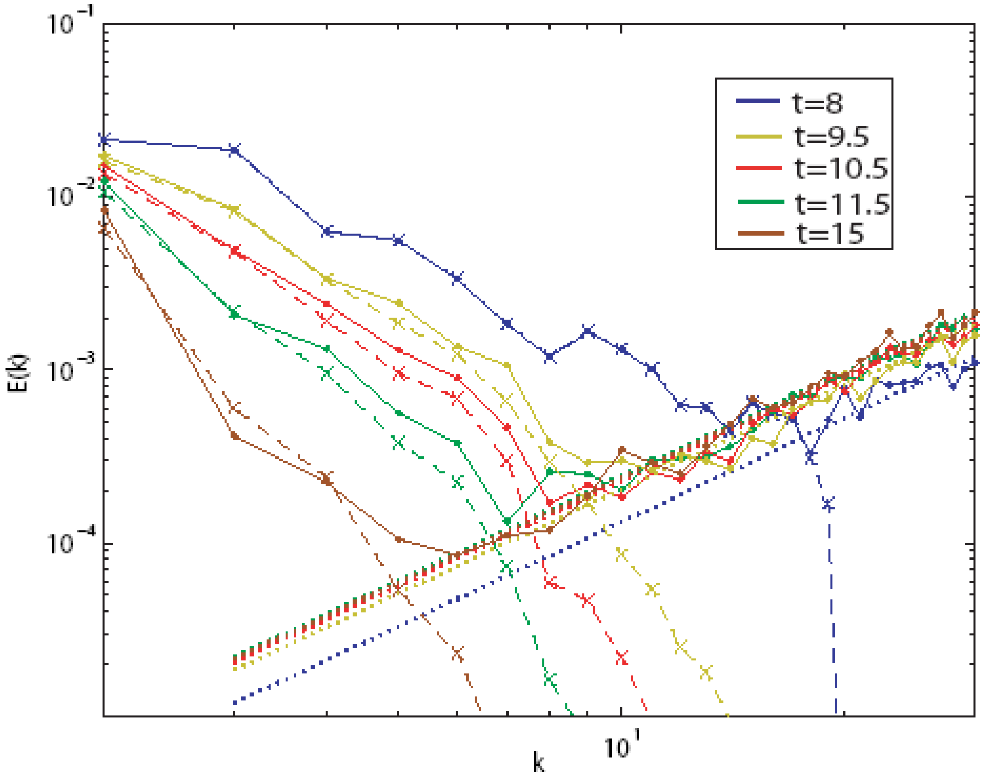
Validation du modèle

Confrontation d'Euler tronqué avec le modèle à deux fluides



Validation du modèle

Confrontation d'Euler tronqué avec le modèle à deux fluides



$$E_{\text{th}}(t) = \langle Q(t) \rangle$$

$$E(k,t) = c(t)k^2$$

$$\langle Q(t) \rangle = \sum_{k > k_{\min}} c(t)k^2.$$

Conclusions

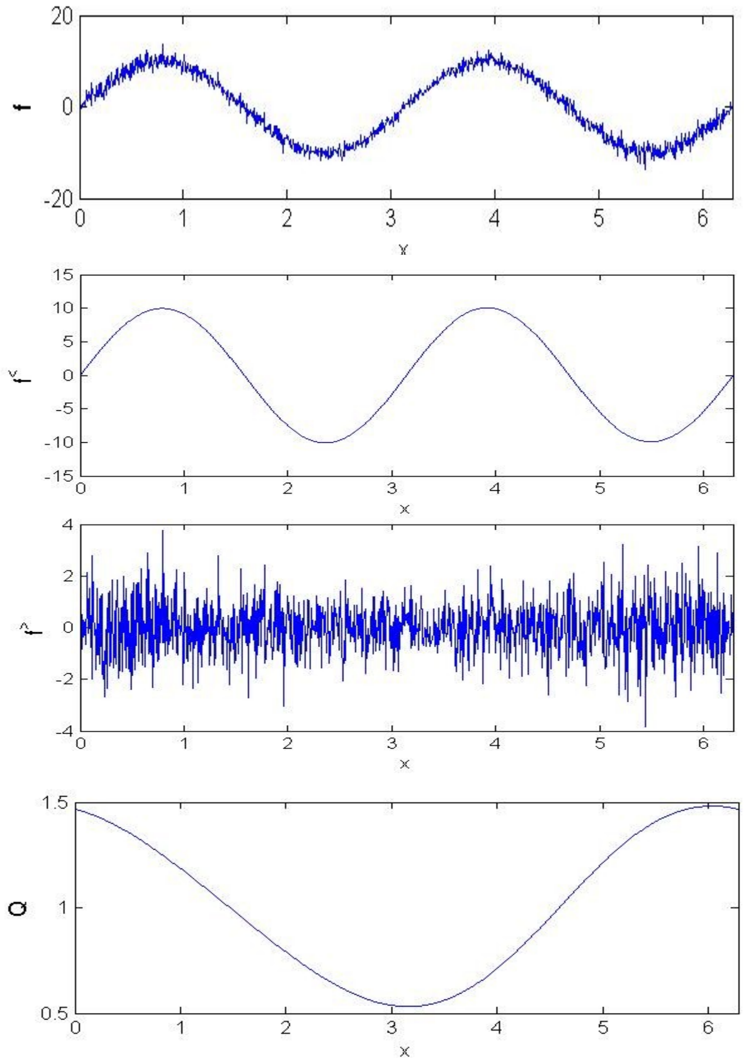
- Les petites échelles sont Quasi-Normales.
- Viscosités EDQNM et Monte Carlo sont en bonne accorde.
- (Hypo)diffusion de la chaleur.
- Modèle à deux fluides est quasi-quantitative.

Future developments

- Extension to helical flows
- Extension to MHD
- Compressible flows, NLS, ….

Chaleur local

Exemple



$$f(x) = 10 \sin 2x + \xi_x \qquad x \in [0, 2\pi]$$

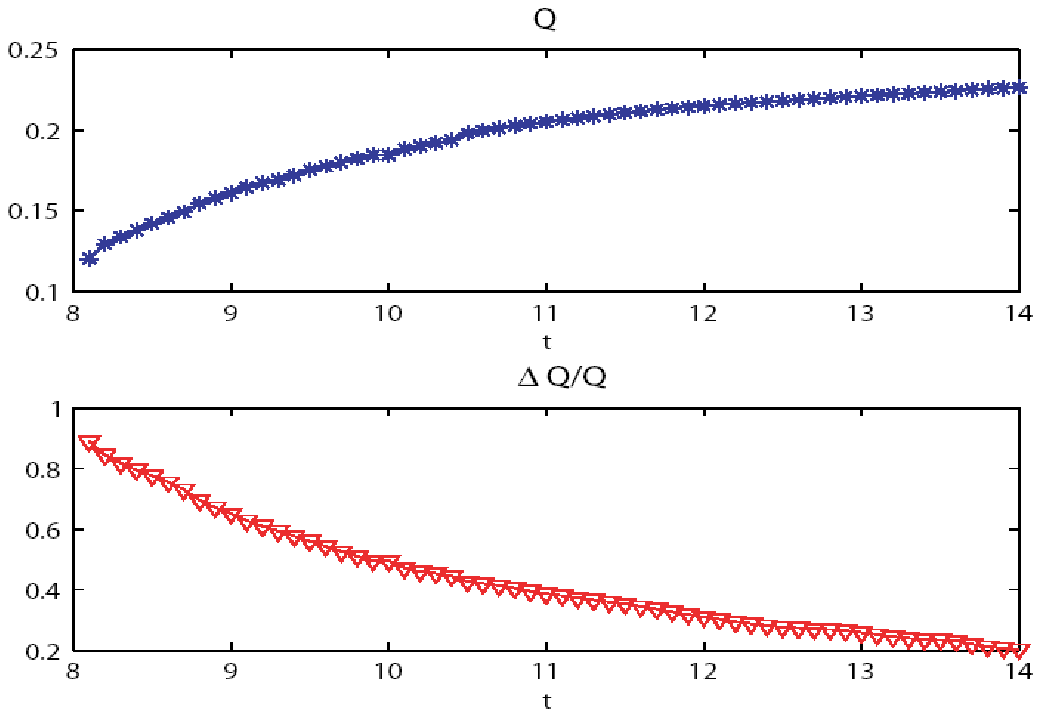
$$\begin{aligned} \overline{\xi_x \xi_y} &= 0 \qquad \forall x \neq y \\ \overline{\xi_x} &= 0 \\ \frac{1}{2}\overline{\xi_x^2} &= 1 + 0.5 \cos x \end{aligned}$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}[(f^>)^2]^<(x)$$

Sommaire

- Relaxation de l’équation d’Euler tronquée
  - Statistique des petites échelles
  - Diffusion de la chaleur
- Modèle à deux fluides
  - Prédictions EDQNM
  - Détermination numérique des diffusivités
  - Validation du modèle
- Conclusions

Diffusion de la Chaleur



Truncated Euler equations

Incompressible Euler equations

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

Galerkin truncation

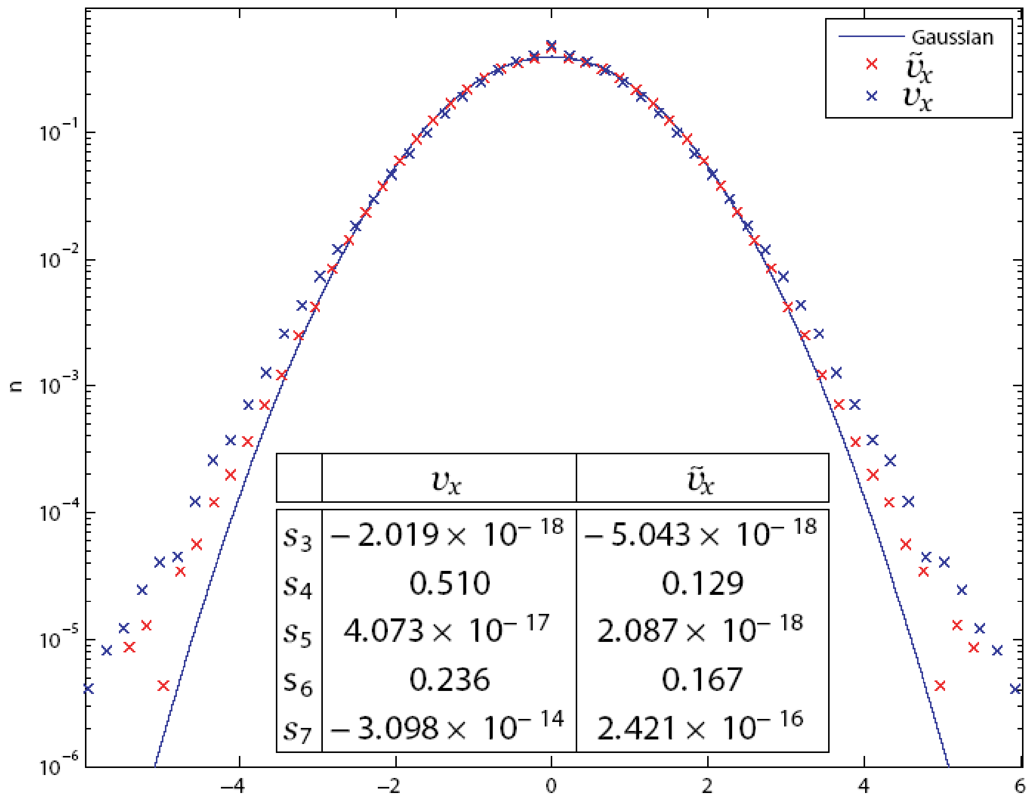
$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = 0 \text{ for } \sup_\alpha |k_\alpha| \le k_{\max}$$

Energy Spectrum

$$E(k,t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\Delta k/2<|\mathbf{k}'|<k+\Delta k/2} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}',t)|^2$$

$$E_{tot} = \sum_k E(k)$$

E(k)



	v_x	$\tilde{v}_x$
s_3	-2.019×10^{-18}	-5.043×10^{-18}
s_4	0.510	0.129
s_5	4.073×10^{-17}	2.087×10^{-18}
s_6	0.236	0.167
s_7	-3.098×10^{-14}	2.421×10^{-16}