Estimation des fluctuations de position

Olivier Poujade*
CEA-DAM, BP12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France

(Dated: May 30, 2005)

Le problème posé est le suivant : *Soit une balle lancée dans l'air à grande vitesse initiale (très bien contrôlée) et soumise à la gravité. Peut-on estimer par un calcul simple les fluctuations de position de retombée de l'objet sur le sol causées par les fluctuations turbulentes des forces de traînée ? On pourra considérer, soit un tir balistique à un angle donné, soit un tir horizontal en partant d'une hauteur donnée. Le sol étant pris comme horizontal*

PACS numbers:

On va faire les hypothèses supplémentaires suivantes : (i) l'air environnant est supposé au repos, (ii) la balle est solide et parfaitement sphérique (ne subit pas de déformations pendant le vol), (iii) la vitesse de la balle pendant la durée du vol balistique est suffisamment grande pour que l'on puisse considérer que le nombre de Reynolds

$$R_e = \frac{U(t)R}{\nu} \geq 1000 \ , \tag{1}$$

où $U(t)$ est le module de la vitesse de la balle à l'instant t, R le rayon de la balle et ν la viscosité cinématique du gaz. Cette dernière hypothèse permet de considérer un sillage turbulent développé pendant tout le vol.

On sait, par expérience, que le coefficient de traînée défini par

$$C_f = \frac{F_{\text{traînée}}}{\frac{1}{2}\rho\, S\, U^2} \ , \tag{2}$$

est constant pour U choisi de telle sorte que $R_e \geq 100$ (et en dehors de la crise de traînée qui se situe $10^5 \leq R_e \leq 10^6$). Dans l'expression de C_f, ρ représente la densité du gaz (supposée constante, écoulement incompressible, nombre de Mach faible) et S la surface de la section de la balle perpendiculaire au mouvement (dans le cas d'une sphère pas trop de questions se poser). Le mouvement moyen de la balle est donc donné par l'équation classique

$$M\,\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = M\mathbf{g} - \frac{1}{2} C_f\,\rho\, S\, U(t)\,\mathbf{U}(t) \ , \tag{3}$$

avec les conditions initiales que sont la position ($x = 0$ et $y = 0$) et la vitesse ($vx = U_0\cos(\theta)$ et $vy = U_0\sin(\theta)$) initiale du tir. On peut résoudre cette équation numériquement sans problème et l'on obtient ainsi la trajectoire moyenne du vol avec la vitesse $U(t)$ à chaque instant.

Regardons, maintenant, l'influence des fluctuations de traînée dues aux fluctuations turbulentes de pression en bord de fuite de la sphère. Nous allons faire faire un raisonnement en ordre de grandeur. La traînée est essentiellement due à la différence de pression hydrodynamique entre le bord d'attaque et le bord de fuite. La pression au bord d'attaque est donnée par

$$P_{\text{attaque}} \sim P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho\, U^2(t) \ . \tag{4}$$

La pression au bord de fuite est donnée par

$$P_{\text{fuite}} \sim P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho\, U^2(t) - \underbrace{\frac{1}{2} C_f\,\rho\, U^2(t)}_{turbulence} \ . \tag{5}$$

Directement après le bord de fuite, l'énergie cinétique turbulente massique est donc $k \sim U^2(t)$, la dissipation massique $\epsilon \sim U^3(t)/R$ et le temps caractéristique d'évolution des grandes structures turbulentes est $\tau \sim R/U(t)$. On a donc en plus du différentiel moyen de pression qui cause la traînée moyenne, des fluctuations de pression de l'ordre de $\sim \rho U^2(t)$ Pascal toutes les $\tau \sim R/U(t)$ secondes. Cela correspond à une force de traînée additionnelle

$$\mathbf{F}_{\text{tranée fluc}} \sim -\sum_i \left[\frac{R}{U(t)}\delta(t-\tau_i)\right]\ \epsilon(\tau_i)\,\rho\, S\, U(t)\,\mathbf{U}(t) \ . \tag{6}$$

τ_i correspondent aux instants des fluctuations importantes qui sont espacée de $\sim R/U(t)$ et $\epsilon(\tau_i) \in \{-1, +1\}$ suivant que la fluctuation est une surpression ou une dépression. L'équation finale est

$$M\,\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = M\mathbf{g} - \frac{1}{2} C_f\,\rho\,S\,U(t)\,\mathbf{U}(t) - \sum_i \delta(t-\tau_i)\,\underbrace{\epsilon(\tau_i)\,\rho\,S\,R\,\mathbf{U}(t)}_{\text{vitesse diffusion}}\ . \qquad (7)$$

Il est possible de résoudre le problème exact à l'aide d'une simulation numérique de type Monte-Carlo où l'on génére les τ_i avec la bonne distribution (qui n'est en géŕal pas gaussienne pour de la turbulence). Pour simplifier le problème à outrance, afin d'obtenir un résultat analytique, on suppose que $U(t)$ est constant et de l'ordre de U_0, que les τ_i sont espacés du même intervalle de temps R/U_0 (distribution piquée). Le mouvement fluctuant, qui se superpose au mouvement moyen, est donc une marche aléatoire

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\sum_i \delta(t - R/U_0 \times i)\ \epsilon(\tau_i)\,\frac{1}{M}\rho\,S\,R\,U_0 \qquad (8)$$

dont le coefficient de diffusion est donné par

$$D \sim \left(\frac{\rho\,S\,R\,U_0}{M}\right)^2 \times \frac{R}{U_0}\ . \qquad (9)$$

La durée du vol balistique est de l'ordre de $T \sim U_0/g$ et la distance de l'impact du point de tir est de l'ordre de $L \sim U_0^2/g$. Une estimation de la largeur du domaine d'impact est

$$\begin{aligned}
\Delta x &\sim \sqrt{D\,T}\ , && (10)\\
&\sim \sqrt{\left(\frac{\rho\,S\,R\,U_0}{M}\right)^2 \frac{R}{g}}\ , && (11)\\
&\sim \sqrt{\left(\frac{M_g}{M}\right)^2 \frac{R\,U_0^2}{g}}\ , && (12)\\
&\sim \frac{M_g}{M}\sqrt{\frac{R}{g}}U_0\ , && (13)
\end{aligned}$$

où M_g représente la masse de gaz correspondant au volume de la balle. CQFD

* Electronic address: `olivier.poujade@cea.fr`